دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی**

عنوان

مدل‌های نااستاندارد تعریف‌پذیر در حساب پئانو

استادان راهنما

دکتر سعید صالحی‌پور، دکتر جعفرصادق عیوضلو

پژوهشگر

صفدر عصمتی مهربانی

۱۳۹۱

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استادان راهنمای خود، جناب آقای دکتر سعید صالحی پور و جناب آقای دکتر جعفرصادق عیوضلو، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر محمد شهریاری که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند کمال امتنان را دارم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از دوستان عزیزم امید راضی، سالار ودادی، سیامک هدیه، ارسلان کریمی، میثم شیرزاد، انور رحمانی، علی جلیلوند، داوود ایاسه، آرش رهی، سید جعفر میربهبهانی و شعبان بالا خیلی به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

صفدر عصمتی مهربانی
۱۳۹۱

نام خانوادگی: عصمتی مهربانی نام: صفدر

عنوان پایان‌نامه: مدل‌های نااستاندارد تعریف‌پذیر در حساب پئانو

استادان راهنما:
دکتر سعید صالحی‌پور، دکتر جعفرصادق عیوضلو

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهار ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۵۱

کلیدواژه‌ها: حساب پئانو، مدل تعریف‌پذیر، قضیه تننباوم، ساختار هنکین، قضیه حسابی‌شده تمامیت.

چکیده

در این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [3] تنظیم شده است، مدل‌هایی از حساب پئانو، PA، که در یک مدل PA تعریف‌پذیر هستند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای هر مدل تعریف‌پذیر N (بدون پارامتر) در یک مدل M، نشان داده می‌شود که اگر M یک توسیع مقدماتی از مدل استاندارد بوده و N هم‌ارز مقدماتی با M باشد، آن‌گاه N یکریخت با M است. از سوی دیگر نشان داده می‌شود که مدل M و مدل تعریف‌پذیر (با پارامتر) N در M وجود دارند به طوری که N هم‌ارز مقدماتی با M است اما یکریخت با آن نیست. همچنین مدل M و مدل تعریف‌پذیر (با پارامتر) N در M وجود دارند به طوری که N هم‌ارز مقدماتی و یکریخت با M است اما به طور تعریف‌پذیر یکریخت با M نیست. همچنین تعمیمی از قضیه تننباوم ارائه می‌شود. در آخر با ارائه اصلاحی بر روش کوتلارسکی[الف] روش جدیدی برای ساخت مدل‌های تعریف‌پذیر داده می‌شود.

[الف] Kotlarski

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمه

پئانو[۱] در سال ۱۸۸۹ اصول مشهور خویش، یعنی اصول پئانو را ارایه کرد. اصول پئانو تعریف عدد طبیعی را در بر دارد و می‌توان گفت که یکی از بزرگ‌ترین تحولات تاریخی در منطق و مبانی ریاضی به شمار می‌آید. حساب مرتبه دوم پئانو، دستگاه اعداد طبیعی را به طور یکتا مشخص می‌سازد، اما سیستم اصل موضوعی مرتبه اول پئانو دارای مدل‌های نااستاندارد است. مدل نااستاندارد مدلی از حساب پئانو، PA است که یکریخت با مدل اعداد طبیعی نیست. در بیش از پنجاه سال اخیر، مطالعه مدل‌های نااستاندارد حساب، هم از لحاظ محتوا و هم از لحاظ روش‌ها و تکنیک‌ها، به یکی از شاخه‌های قدرتمند ریاضی تبدیل شده است. برخی خواص این مدل‌های نااستاندارد، کاربردهای جالبی می‌تواند در سایر زمینه‌های منطق و ریاضی، مثل علوم کامپیوتر داشته باشد.
اما ناگفته نماند که مدل‌های نااستاندارد از منظر فلسفی هم مورد توجه بوده اند. آنچه جالب به نظر می‌رسد این است که موضوع این نوع مدل‌ها دارای ریشه‌های فلسفی است. وجود مدل‌های نااستاندارد حساب اولین بار توسط ددکیند، هنگام مطالعه بر روی سری‌های اعداد طبیعی کشف شد. بعد از ددکیند[۲]، اسکولم[۳] وجود مدل‌های نااستاندارد حساب را مطرح کرد و در واقع وجود این مدل‌ها، کاربرد آسانی از قضیه فشردگی و قضیه لون‌هایم- اسکولم[۴] است. برای آشنایی با مدل‌های نااستاندارد حساب،

[۱] Peano
[۲] Dedekind
[۳] Skolem
[۴] Lowenheim-Skolem

از نگاه تاریخی و فلسفی به [1] مراجعه شود.
نظریه مدل‌های نااستاندارد، هم از روش‌های نظریه-مدلی و هم از روش‌های نظریه-برهانی، برای مطالعه حساب نااستاندارد بهره می‌جوید. این دو شاخه، علاوه بر نقاط افتراق فراوان، هماهنگی لازم برای وحدت‌بخشی به نظریه منطقی اعداد را دارند. تعریف‌پذیری از اساسی‌ترین روش‌های نظریه مدل، برای مطالعه دستگاه‌های ریاضی بوده و حساب، مثالی زیبا از یک نظریه ناباز‌گشتی (محاسبه‌ناپذیر) را فراهم می‌کند. در این پایان‌نامه که بر اساس مقاله [3] نوشته می‌شود، برخی خواص مدل‌های نااستاندارد تعریف‌پذیر در حساب پئانو بررسی می‌شوند.
فرض کنید M و N مدل‌هایی از PA باشند. گوئیم N در M تعریف‌پذیر است هرگاه مجموعه تعریف‌پذیر $D_N \subset M$ در M و عناصر $0_N, 1_N \in D_N$، و توابع تعریف‌پذیر $+_N$ و $\cdot_N$ در M و همچنین رابطه تعریف‌پذیر $<_N \subset M^2$ در M موجود باشند به طوری که

$$N = (D_N, +_N, \cdot_N, <_N, 0_N, 1_N).$$

با توجه به تعریف فوق، علاقه‌مند به این پرسش هستیم که چه مدل‌هایی از PA در مدل دیگر PA، تعریف‌پذیر هستند. تعاریف و مفاهیم پایه در فصل دو، مطرح خواهند شد. به ویژه مفهوم نشاننده استاندارد، معرفی خواهد شد که نقش مهمی را در این نوشته بازی می‌کند. در فصل سه، مدل‌های تهی-تعریف‌پذیر (تعریف‌پذیر بدون پارامتر)، در مدل های PA، مورد بررسی قرار می‌گیرند. هدف از این فصل کوتاه، فراهم کردن مقایسه ای بین تهی-تعریف‌پذیری و تعریف‌پذیری با پارامتر است. در این فصل خواهیم دید که اگر M، توسیعی مقدماتی از مدل استاندارد و N، تهی-تعریف‌پذیر در M و هم‌ارز مقدماتی با آن باشد آنگاه N، به طور تعریف‌پذیر یکریخت با M است. به ویژه هر مدل تعریف‌پذیر در مدل استاندارد و هم‌ارز مقدماتی با آن، با مدل استاندارد یکریخت است. در فصل چهارم، مدل‌های تعریف‌پذیر با پارامتر در مدل‌های PA، بررسی می‌شوند. در رابطه با این موضوع دو مفهوم به طور اساسی به کار گرفته می‌شوند. اولین مفهوم، مدل‌های به طور بازگشتی اشباع‌شده[5] هستند. این مفهوم ترکیبی نامتجانس از نظریه بازگشتی و نظریه مدل است. این مدل‌ها به صورت نادقیق،

[5] Recursively Saturated

مدل‌هایی هستند که برای مجموعه‌های بازگشتی از فرمول‌ها، اشباع‌شده هستند. تعریف مدل‌های به طور بازگشتی اشباع‌شده در سال ۱۹۷۰ توسط باروایس[۶] و اشلیف[۷] و به طور مستقل توسط روسیر[۸]، معرفی شد. این حقیقت که هر مدلی یک توسیع مقدماتی به طور بازگشتی اشباع‌شده دارد، ابزار قدرتمندی را برای مطالعه ساختارهای مرتبه اول فراهم می‌کند. این موضوع وقتی که با مدل‌های PA سروکار داریم مورد توجه قرار گرفته و در چند دهه اخیر، نتایج جالب توجهی توسط کی[۹]، کساک[۱۰]، کتلارسکی[۱۱]، اسمورینسکی[۱۲] و ... حاصل شده‌اند.

دومین مفهوم، نظریه ها و ساختارهای هنکین هستند. لئون هنکین[۱۳] در سال ۱۹۴۹ با استفاده از روش ثابت‌ها، اثبات جدیدی برای تمامیت قوی منطق مرتبه اول ارائه کرد. ضمن اینکه روش او شامل حساب استنتاجی منطق مرتبه اول می‌شود، با اصلاحاتی، برای ایده‌های نظریه-مدلی نیز بکار می‌رود. نظریه T را یک هنکین-نظریه گویند هرگاه، برای هر جمله بصورت $\exists x\varphi(x)$، نماد ثابت c، در زبان موجود باشد به طوری که $T \vdash \exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$. در فصل ۴ خواهیم دید که مدل‌های M و N وجود دارند به طوری که N در M، تعریف‌پذیر و هم‌ارز مقدماتی با M است اما یکریخت با آن نیست. همچنین مدل M و مدل تعریف‌پذیر N در M وجود دارند به طوری که M و N هم‌ارز مقدماتی و یکریخت باهم هستند، اما به طور تعریف‌پذیر، یکریخت نیستند. در فصل پنجم، توسیعی از قضیه تننباوم[۱۴] ارایه می‌شود. قضیه مشهور تننباوم بیان می‌کند که در هر مدل نااستاندارد حساب که در مدل استاندارد اعداد طبیعی، تعریف‌پذیر باشد، اعمال جمع و ضرب نمی‌توانند بازگشتی (محاسبه‌پذیر) باشند. در اینجا تعمیمی برای این قضیه به مدل‌های نااستاندارد بیان می‌شود. مطلبی که نقش اساسی را در این بخش خواهد داشت، مفهوم $\Delta_{n+1}(M)-$تعریف‌پذیری است. همان طوری که نشان داده

[۶] Barwise
[۷] Schlipf
[۸] Ressayre
[۹] Kaye
[۱۰] Kossak
[۱۱] Kotlarski
[۱۲] Smorynski
[۱۳] Leon Henkin
[۱۴] Tennenbaum

می‌شود $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیری، توسیعی از مفهوم به طور بازگشتی تعریف‌پذیر است که با استفاده از آن، تعریف‌پذیری مدل N در مدل M، به $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیری، تعمیم داده خواهد شد. در این فصل خواهیم دید که N، به طور تعریف‌پذیر، یکریخت با M است هرگاه N، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر بوده و نشاننده استاندارد M در N، Σ_n–مقدماتی باشد.

در فصل ۶ یک روش جدید برای ساخت مدل‌های تعریف‌پذیر در یک مدل PA ارایه می‌شود. در واقع این روش پیرایشی بر روش کوتلارسکی به کار رفته در [6] می‌باشد. در این فصل مدل N طوری ساخته می‌شود که در قضیه زیر صدق کند.

قضیه. فرض کنید M، یک مدل نااستاندارد PA و n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت مدل N وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. N در M، تعریف‌پذیر است.

۲. N، به طور بازگشتی اشباع‌شده است.

۳. N یک توسیع انتهایی Σ_n^+–مقدماتی از M است.

فصل ۲

مفاهیم پایه و مقدماتی

۱.۲ مقدماتی از نظریه بازگشت

ابتدا این فصل را با مفاهیم مقدماتی از نظریه بازگشتی شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. کلاس توابع بازگشتی جزئی، C، کوچکترین کلاس از توابع $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ برای $A \subseteq \mathbb{N}^k$ و $k \geqslant 1$ است، به طوری که:

(الف) C شامل توابع تالی و صفر است:

$$S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad S(x) = x + 1;$$

$$0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad 0(x) = 0;$$

و به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، شامل تابع تصویر است:

$$\pi_i^n : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \pi_i^n(x_1, x_2..., x_n) = x_i.$$

(ب) C تحت قاعده ترکیب بسته است. یعنی اگر توابع جزئی $f(x_1, ..., x_k)$ و $g_1(\overline{y}), ..., g_k(\overline{y})$ در C باشند آنگاه تابع جزئی $f(g_1(\overline{y}), ..., g_k(\overline{y}))$ در C است.

(ج) C تحت قائده بازگشت ابتدائی بسته است. یعنی اگر $f(\overline{x})$ و $g(\overline{x}, y, z)$ در C باشند، آنگاه تابع $h(\overline{x}, y)$ نیز که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، در C است:

$$h(\overline{x},0)=f(\overline{x}),\quad h(\overline{x},y+1)=g(\overline{x},y,h(\overline{x},y)).$$

(د) C تحت عملگر کمینه‌ساز بسته است. یعنی اگر $g(\overline{x},y)$ در C باشد آنگاه تابع $h(\overline{x})=(\mu y)(g(\overline{x},y)=0)$ نیز که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، در C است:
$h(\overline{x})$ برابر کوچکترین y ای است که $g(\overline{x},0),...,g(\overline{x},y)$ همگی تعریف شده باشند و $g(\overline{x},y)=0$؛
در غیر این صورت، یعنی اگر چنان y ای وجود نداشته باشد، $h(\overline{x})$ تعریف نشده است.

تعریف ۲.۱.۲. کلاس توابع بازگشتی مقدماتی، PR، کوچکترین کلاس از توابع بازگشتی جزئی است که شامل توابع تالی، صفر و تصویر بوده و تحت قواعد ترکیب و بازگشت ابتدائی بسته است.
اعضای PR تام هستند. توابع جمع، ضرب، توان، فاکتوریل و تابع $\mathrm{p}(n)$ که $n-$امین عدد اول را نشان می‌دهد مثال‌هایی از توابع بازگشتی مقدماتی هستند.

تعریف ۳.۱.۲. هر تابع بازگشتی جزئی تام را بازگشتی گوئیم. همچنین مجموعه $A\subseteq\mathbb{N}^k$ برای $k\geqslant 1$ بازگشتی گفته می‌شود هرگاه تابع مشخصه آن بازگشتی باشد.

تعریف ۴.۱.۲. $A\subseteq\mathbb{N}^k$ را به طور بازگشتی شمارا ($r.e.$) گویند هرگاه دامنه یک تابع بازگشتی جزئی مانند $f:A\longrightarrow\mathbb{N}$ باشد. به عنوان مثال، هر مجموعهٔ بازگشتی به طور بازگشتی شمارا است.
ثابت می‌شود که $A\subseteq\mathbb{N}^k$ بازگشتی است اگر و تنها اگر A و متمم A، A^c، هر دو $r.e.$ باشند.

۲.۲ حساب پئانو

حال در ادامه به معرفی حساب پئانو و برخی مفاهیم مربوط به آن می‌پردازیم.
زبان حساب را $L_{PA}=\{+,\cdot,<,0,1\}$ در نظر می‌گیریم و برای هر $L_{PA}-$ساختار، ترم $(1+...(1+(1+(1+1)))...)$ که در آن 1 به تعداد n بار ظاهر شده است را با $\underline{n}$ نشان می‌دهیم و $\underline{0}$ نیز همان نماد ثابت صفر است.
حساب پئانو، PA[1]، از اصول موضوع زیر تشکیل شده است:

[1] Peano Arithmetic

$AX_1: \ \forall x, y, z((x+y)+z = x+(y+z))$

$AX_2: \ \forall x, y(x+y = y+x)$

$AX_3: \ \forall x, y, z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

$AX_4: \ \forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$

$AX_5: \ \forall x, y, z(x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z)$

$AX_6: \ \forall x((x+0 = x) \wedge (x \cdot 0 = 0))$

$AX_7: \ \forall x(x \cdot 1 = x)$

$AX_8: \ \forall x, y, z((x < y \wedge y < z) \longrightarrow x < z)$

$AX_9: \ \forall x(\neg x < x)$

$AX_{10}: \ \forall x, y(x < y \vee x = y \vee y < x)$

خلاصه‌نویسی: به‌جای $x < y \vee x = y$ می‌نویسیم $x \leqslant y$. و $x \geqslant y$ یعنی $y \leqslant x$.
نتیجه‌گیری از سه اصل اخیر: $\forall x, y(x < y \longrightarrow \neg y < x)$.

$AX_{11}: \ \forall x, y, z(x < y \longrightarrow x+z < y+z)$

$AX_{12}: \ \forall x, y, z(x < y \wedge 0 < z \longrightarrow x \cdot z < y \cdot z)$

$AX_{13}: \ \forall x, y(x < y \longrightarrow \exists z \ x+z = y)$

$AX_{14}: \ 0 < 1 \wedge \forall x(x > 0 \longrightarrow x \geqslant 1)$

$AX_{15}: \ \forall x(x \geqslant 0)$

نکته: از اصول موضوع فوق نتیجه می‌شود که عکس AX_{11} ، AX_{12} و AX_{13} برقرار است.
اصول موضوع AX_1 تا AX_{15}، PA^- نامیده می‌شود.
برای هر L_{PA}–فرمول $\phi(x,\overline{y})$، L_{PA}–جمله $I_x\phi$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$I_x\varphi = \forall\overline{y}(\phi(0,\overline{y}) \wedge \forall x(\phi(x,\overline{y}) \longrightarrow \phi(x+1,\overline{y})) \longrightarrow \forall x\phi(x,\overline{y}))$$

قالب اصل موضوعی (شِما) استقرا، مجموعه همه $I_x\phi$هایی است که $\phi(x,\overline{y})$ یک L_{PA}–فرمول است.

تعریف ۱.۲.۲. شمای استقرا $PA = PA^- +$.

مجموعه $\omega = \{0,1,2,...\}$ همراه با عمل جمع و ضرب و رابطه کوچکتری معمولی، مدلی برای PA است که مدل استاندارد PA نامیده می‌شود. هر مدل PA که یکریخت با ω نباشد مدل نااستاندارد PA گفته می‌شود. اثبات شده است که دقیقا $2^{\aleph_0}$ تا مدل غیریکریخت شمارای PA موجود است. (اثبات در منبع [4] قضیه .1.1).

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید M و N دو L_{PA}–ساخت باشند که $N \subseteq M$ (N زیرساختی از M باشد). گوئیم N یک بخش آغازین از M و یا M یک توسیع انتهایی از N است و با نماد $N \subseteq_e M$ نشان داده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in N$ و $y \in M$، اگر $M \models y < x$ آنگاه $y \in N$.

در قضیه زیر نشان داده می‌شود که مدل استاندارد ω به طور آغازین در مدل‌های PA می‌نشینند.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $M \models PA^-$. در این‌صورت نگاشت $h : \omega \longrightarrow M$ که $h(n) = \underline{n}^M$، یک L_{PA}–نشاننده است و ω را بروی یک بخش آغازین از M می‌نگارد.

برهان. برای اثبات این قضیه به لم‌های زیر نیاز داریم.
لم (الف) برای هر $n,k,l \in \omega$ اگر $n = k + l$ آنگاه $PA^- \vdash \underline{n} = \underline{k} + \underline{l}$.
لم (ب) برای هر $n,k,l \in \omega$ اگر $n = k \cdot l$ آنگاه $PA^- \vdash \underline{n} = \underline{k} \cdot \underline{l}$.

لم (ج) برای هر $n,k \in \omega$ اگر $n < k$ آنگاه $PA^- \vdash \underline{n} < \underline{k}$.

لم (د) برای هر $n,k \in \omega$، $PA^- \vdash \forall x(x \leqslant k \longrightarrow x = \underline{0} \vee ... \vee x = \underline{k})$.

برای اثبات لم‌ها به [4] رجوع شود.

لم‌های (الف)، (ب) و (ج) نشان می‌دهند که نگاشت h حافظ $+$، $\cdot$ و $<$ است. حال چون $PA^- \vdash \forall x,y(x < y \longrightarrow \neg x = y)$ لذا h، یک به یک و در نتیجه یک نشاننده است. سرانجام لم (د) بیان می‌کند که $N = \{\underline{n}^M : n \in \omega\}$ یک بخش آغازین از M است. پس ω به طور آغازین در همه مدل‌های PA^- و به ویژه در مدل‌های PA می‌نشیند. $\square$

با توجه به قضیه قبل، نگاشت $g : \omega \longrightarrow N$ که $g(n) = \underline{n}^M$، یک یکریختی L_{PA}−ساختارهاست. پس نتیجه می‌شود که $\omega \cong N$ و $\omega \subseteq_e M$. پس بدون ابهام در مدل‌های PA^-، $\underline{n}^M$ با n نشان داده و آنها را اعضای استاندارد M می‌نامیم. همچنین مجموعه همه اعضای استاندارد M را هم بدون ابهام با ω نشان داده و آن را قسمت استاندارد M می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $M \models PA$. مجموعه ناتهی $C \subsetneq M$ یک برش نامیده می‌شود هرگاه:

(الف) C از پایین بسته باشد، یعنی اگر $x < y$ و $y \in C$ آنگاه $x \in C$.

(ب) C تحت تابع تالی بسته باشد.

به‌عنوان مثال، مدل استاندارد ω برای هر مدل PA یک برش است.

لم ۵.۲.۲. فرض کنید $M \models PA$ نااستاندارد و C یک برش از M باشد. دراین‌صورت C در M، تعریف‌پذیر نیست.

برهان. فرض کنید که C با فرمولی مانند $\phi(x,\overline{a})$ که $\overline{a} \in M$، تعریف شود. آنگاه چون $0 \in C$ پس $M \models \phi(0,\overline{a})$. بعلاوه اگر $M \models \phi(x,\overline{a})$، آنگاه $x \in C$ و لذا $x+1 \in C$، پس $M \models \phi(x+1,\overline{a})$. چون $M \models PA$، پس $M \models \forall x\phi(x,\overline{a})$، یعنی $C = M$ که یک تناقض است! $\square$

قضیه ۶.۲.۲. (قضیه لبریز[۲]): فرض کنید $M \models PA$ نااستاندارد و C یک برش از M باشد. همچنین

[۲] Overspill

فرض کنید $\overline{a} \in M$ و $\phi(x, \overline{a})$ یک L_{PA}–فرمول باشد که برای هر $b \in C$، $M \models \phi(b, \overline{a})$. دراین‌صورت عضو $c > C$ در M موجود است به طوری که $M \models \forall x \leqslant c \; \phi(x, \overline{a})$.

برهان. اگر چنان نباشد آنگاه C با فرمول $\forall y < x \; \phi(y, \overline{a})$ تعریف می‌شود که متناقض با تعریف‌ناپذیری آن است. □

در حالت خاص اگر $C = \omega$ آنگاه قضیه بیان می‌کند که اگر یک ویژگی به ازای همه اعداد طبیعی درست باشد، حتما یک عضو نااستانداردی دارای این ویژگی است و به همین خاطر لبریز گفته می‌شود.

تعریف ۷.۲.۲. فرض کنید M و N دو L_{PA}–ساخت باشند که $N \subseteq M$. N زیرساخت مقدماتی M نامیده و با نماد $N \prec M$ نشان داده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر L_{PA}–فرمول $\phi(\overline{x})$ و به‌ازای هر $\overline{a} \in N^n$ داشته باشیم $N \models \phi(\overline{a}) \Longleftrightarrow M \models \phi(\overline{a})$.

تعریف ۸.۲.۲. (الف) فرض کنید $M \models PA$ و A، زیر مجموعه‌ای از M باشد. می‌گوئیم $b \in M$، روی A، تعریف‌پذیر است اگر فرمول $\phi(x, \overline{y})$ و $\overline{a} \in A$ موجود باشد به طوری که $M \models \phi(b, \overline{a}) \wedge \forall y (\phi(y, \overline{a}) \rightarrow y = b)$. به عبارت دیگر مجموعه $\{b\}$، A–تعریف‌پذیر است.

(ب) بستار تعریف‌پذیر مجموعه A را با $\mathrm{dcl}_M(A)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{dcl}_M(A) = \{m \in M : \text{روی } A\text{، تعریف‌پذیر است } m\}.$$

قضیه ۹.۲.۲. اگر $M \models PA$ و A، زیر مجموعه‌ای از M باشد، آنگاه $\mathrm{dcl}_M(A) \prec M$.

برهان. برای زیرساخت بودن کافی است ثابت شود که $\mathrm{dcl}_M(A)$ تحت توابع $+$ و $\cdot$ بسته است و $0, 1$ را دارد. داریم $0, 1 \in \mathrm{dcl}_M(A)$ زیرا فرمول‌های $x = 0$ و $y = 1$ اعداد 0 و 1 را تعریف می‌کنند. فرض کنید $x, y \in \mathrm{dcl}_M(A)$ و فرمول‌های $\phi(x, \overline{a})$ و $\psi(y, \overline{b})$ را فرمول‌های تعریف کننده آن‌ها روی A در نظر بگیرید. دراین‌صورت $x + y$ و $x \cdot y$ به‌ترتیب به‌وسیله فرمول‌های زیر روی A تعریف می‌شوند:

$$\exists u, v (\phi(u, \overline{a}) \wedge \psi(v, \overline{b}) \wedge z = u + v) \quad \text{و} \quad \exists u, v (\phi(u, \overline{a}) \wedge \psi(v, \overline{b}) \wedge z = u \cdot v).$$

بنابراین $\mathrm{dcl}_M(A) \subseteq M$. برای زیرساخت مقدماتی بودن آن از آزمون تارسکی-وات[۳] استفاده می‌کنیم.

آزمون تارسکی - وات: برای زبان دلخواه L فرض کنید M و N دو L–ساخت باشند که $N \subseteq M$. دراین‌صورت $N \prec M$ اگر و تنها اگر برای هر L–فرمول $\phi(\overline{x}, y)$ و هر $\overline{a} \in N$، اگر $M \models \exists y \phi(\overline{a}, y)$ آنگاه عضو $b \in N$ موجود باشد به طوری که $M \models \phi(\overline{a}, b)$.

پس فرض کنید $\phi(\overline{x}, y)$ یک L_{PA}–فرمول و $\overline{c} \in \mathrm{dcl}_M(A)$ چنان باشد که $M \models \exists x \phi(x, \overline{c})$. نشان می‌دهیم $M \models \phi(d, \overline{c})$ که $d \in \mathrm{dcl}_M(A)$. قرار دهید $\overline{c} = c_1, ..., c_n \in \mathrm{dcl}_M(A)$ و فرض کنید $\theta_i(x, \overline{a})$ فرمول تعریف کننده c_i در M باشد که $\overline{a} \in A$. دراین‌صورت داریم: $M \models \exists x \exists \overline{y} (\bigwedge_{i=1}^n \theta_i(y_i, \overline{a}) \wedge \phi(x, \overline{y}))$. قرار دهید $\theta(x, \overline{a}) = \exists \overline{y} (\bigwedge_{i=1}^n \theta_i(y_i, \overline{a}) \wedge \phi(x, \overline{y}))$. اصل کوچکترین عضو را برای $\theta(x, \overline{a})$ در $M \models PA$، استفاده می‌کنیم. داریم:

$$M \models \exists x [\theta(x, \overline{a}) \wedge \forall z < x \forall \overline{w} (\bigwedge_{i=1}^n \theta_i(w_i, \overline{a}) \longrightarrow \neg \phi(z, \overline{w}))].$$

فرمول داخل کروشه را $\psi(x, \overline{a})$ بگیرید. دراین‌صورت $\psi(x, \overline{a})$ عضو منحصر به فردی مانند d را روی A در M تعریف می‌کند. پس $d \in \mathrm{dcl}_M(A)$ و $M \models \psi(d, \overline{a})$، لذا $M \models \theta(d, \overline{a})$، یعنی $M \models \exists \overline{y} (\bigwedge_{i=1}^n \theta_i(y_i, \overline{a}) \wedge \phi(d, \overline{y}))$. در نتیجه $M \models \phi(d, \overline{c})$. □

تعریف ۱۰.۲.۲. برای L_A–ترم t، فرمول $(\forall x < t)\phi$، خلاصه‌نویسی برای فرمول $\forall x (x < t \longrightarrow \phi)$ و $(\exists x < t)\phi$، خلاصه‌نویسی برای فرمول $\exists x (x < t \wedge \phi)$ است. به همین ترتیب برای $\leqslant$ مشابه تعریف فوق را داریم. سورهای $\forall x < t$، $\exists x < t$، $\forall x \leqslant t$ و $\exists x \leqslant t$ را سورهای کران‌دار می‌نامند.

L_{PA}–فرمول $\theta(\overline{x})$ یک Δ_0–فرمول است هرگاه همه سورهای به کار رفته در آن کران‌دار باشند.

L_{PA}–فرمول $\phi(\overline{x})$ یک Σ_1–فرمول است هرگاه به صورت $\exists \overline{y} \theta(\overline{x}, \overline{y})$ باشد که θ یک Δ_0–فرمول است.

L_{PA}–فرمول $\psi(\overline{x})$ یک Π_1–فرمول است هرگاه به صورت $\forall \overline{y} \theta(\overline{x}, \overline{y})$ باشد که θ یک Δ_0–فرمول است.

قرار دهید: Δ_0–فرمول $=$ Σ_0–فرمول $=$ Π_0–فرمول. با استقرا روی n، Σ_{n+1}–فرمول‌ها به صورت

[۳] The Tarski-Vaught Test

$(\exists \overline{x})\phi$ هستند که ϕ یک Π_n–فرمول است؛ و Π_{n+1}–فرمول‌ها به صورت $(\forall \overline{x})\phi$ هستند که ϕ یک Σ_n–فرمول است. با توجه به تعریف، نقیض یک Σ_n–فرمول، یک Π_n–فرمول است و برعکس.

تعریف ۱۱.۲.۲. فرض کنید $M \models PA$ و $X \subseteq M^n$. مجموعه X، Σ_n–تعریف‌پذیر (Π_n–تعریف‌پذیر) یا به طور خلاصه Σ_n (Π_n) گفته می‌شود، هرگاه توسط یک Σ_n–فرمول (Π_n–فرمول) تعریف شود. به همین ترتیب مجموعه $X \subseteq M^n$، Δ_n–تعریف‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه هم Σ_n–تعریف‌پذیر و هم Π_n–تعریف‌پذیر باشد. تابع $f : M^n \longrightarrow M$، Σ_n است هرگاه گراف f که با نماد Γ_f نشان داده می‌شود یک زیر مجموعه Σ_n از M^{k+1} باشد:

$$\Gamma_f(m_1, ..., m_k, y) \Longleftrightarrow f(m_1, ..., m_k) = y.$$

به ویژه X، Δ_0 است اگر و تنها اگر Σ_0 باشد.

لم ۱۲.۲.۲. برای هر عدد طبیعی n:

(الف) Σ_n–فرمول‌ها و Π_n–فرمول‌ها تحت $\wedge$ و $\vee$ بسته هستند.

(ب) Σ_n–فرمول‌ها تحت سورهای وجودی و Π_n–فرمول‌ها تحت سورهای عمومی بسته هستند.

(ج) Δ_n–مجموعه‌ها تحت متمم گیری بسته هستند.

برهان. به [2] یا [4] رجوع شود. □

تعریف ۱۳.۲.۲. فرض کنید Γ یک مجموعه از L_{PA}–فرمول‌ها و M و N دو L_{PA}–ساخت باشند که $N \subseteq M$. گوئیم N، زیرساخت Γ–مقدماتی از M یا (M، توسیع Γ–مقدماتی از N) است و با نماد $N \prec_\Gamma M$ نشان می‌دهیم هرگاه برای هر $\phi(x) \in \Gamma$ و هر $\overline{a} \in N$ داشته باشیم:

$$N \models \phi(\overline{a}) \Longleftrightarrow M \models \phi(\overline{a}).$$

قضیه ۱۴.۲.۲. فرض کنید M, N دو L_{PA}–ساخت باشند و $N \subseteq_e M$. در این‌صورت $N \prec_{\Delta_0} M$.

برهان. با استقرا روی پیچیدگی فرمول $\theta(\overline{x}) \in \Delta_0$ نشان می‌دهیم که برای هر $\overline{a} \in N$:

$$N \models \theta(\overline{a}) \Longleftrightarrow M \models \theta(\overline{a}).$$

پیچیدگی فرمول $\theta(\overline{x})$، تعداد نمادهای $\neg$، $\wedge$، $\vee$، $\forall x < t$ و $\exists x < t$ به‌کار رفته در آن می‌باشد. لذا فرض کنید که n مساوی پیچیدگی فرمول $\theta(\overline{x})$ باشد. اگر $n = 0$، آنگاه $\theta(\overline{x})$ اتمی است و از آنجا که $N \subseteq M$ پس حکم برقرار است. اکنون فرض کنید پیچیدگی فرمول $\theta(\overline{x})$ برابر $n + 1$ باشد و $\theta(\overline{x}) = \theta_1(\overline{x}) \wedge \theta_2(\overline{x})$ که حکم برای θ_1 و θ_2 برقرار است. برای $\overline{a} \in N$ داریم:

$$N \models \theta(\overline{a})$$

$$\Longleftrightarrow N \models \theta_1(\overline{a}) \wedge \theta_2(\overline{a})$$

$$\Longleftrightarrow N \models \theta_1(\overline{a}) \text{ and } N \models \theta_2(\overline{a})$$

$$\Longleftrightarrow M \models \theta_1(\overline{a}) \text{ and } M \models \theta_2(\overline{a}) \text{ (فرض استقرا)}$$

$$\Longleftrightarrow M \models \theta_1(\overline{a}) \wedge \theta_2(\overline{a})$$

$$\Longleftrightarrow M \models \theta(\overline{a}).$$

فرض کنید $\theta(\overline{x}) = \neg\theta_1(\overline{a})$، و $\overline{a} \in N$. داریم:

$$N \models \theta(\overline{a})$$

$$\Longleftrightarrow N \models \neg\theta_1(\overline{a})$$

$$\Longleftrightarrow N \not\models \theta_1(\overline{a})$$

$$\Longleftrightarrow M \not\models \theta_1(\overline{a}) \text{ (فرض استقرا)}$$

$$\Longleftrightarrow M \models \neg\theta_1(\overline{a})$$

$$\Longleftrightarrow M \models \theta(\overline{a}).$$

اکنون فرض کنید، پیچیدگی فرمول $\theta(\overline{x})$ برابر $n+1$ باشد و $\theta(\overline{x}) = \forall y < t(\overline{x})\theta_1(\overline{x}, y)$ که حکم برای θ_1 برقرار است. برای $\overline{a} \in N$ داریم

$$N \vDash \theta(\overline{a}) \iff N \vDash \theta_1(\overline{a}, b) \text{ ،}N \text{ در } b < t(\overline{a}) \text{ برای هر}$$

اما اگر $\overline{a} \in N$ آنگاه چون N، تحت $+$ و $\cdot$ بسته است، $t(\overline{a}) \in N$. از آن جایی که $N \subseteq_e M$ داریم

$$.\{b \in M : M \vDash b < t(\overline{a})\} = \{b \in N : N \vDash b < t(\overline{a})\}$$

بنابراین طبق فرض استقرا نتیجه می‌گیریم

$$.N \vDash t(\overline{a}) \iff M \vDash \theta_1(\overline{a}, b) \text{ ،}M \text{ در } b < t(\overline{a}) \text{ برای هر} \iff M \vDash \theta(\overline{a})$$

حال فرض کنید $\theta(\overline{x}) = \exists y < t(\overline{x})\theta_1(\overline{x}, y)$ و $\overline{a} \in N$. اگر $N \models \exists y < t(\overline{a})\theta_1(\overline{a}, y)$، آنگاه $b < t(\overline{a})$ در N وجود دارد به طوری که $N \models \theta_1(\overline{a}, b)$؛ لذا بنا به فرض استقرا $b < t(\overline{a})$ در M وجود دارد به طوری که $M \models \theta_1(\overline{a}, b)$. در نتیجه $M \models \exists y < t(\overline{a})\theta_1(\overline{a}, y)$ و لذا $M \models \theta(\overline{a})$. حال برعکس: چون $\overline{a} \in N$ و t یک ترم است لذا $t(\overline{a}) \in N$ و چون $N \subseteq_e M$ پس اگر $y \in M$ با شرط $M \models y < t(\overline{a})$ وجود داشته باشد آنگاه $y \in N$. لذا اگر $M \models \exists y < t(\overline{a})\theta_1(\overline{a}, y)$ آنگاه $b < t(\overline{a})$ در M وجود دارد که عبارت $M \models \theta_1(\overline{a}, b)$ برقرار است. لذا بنابه فرض استقرا و مطالب فوق نتیجه می‌شود که $b < t(\overline{a})$ در N وجود دارد به طوری که $N \models \theta_1(\overline{a}, b)$ و در نتیجه $N \models \exists y < t(\overline{a})\theta_1(\overline{a}, y)$. $\square$

تعریف ۱۵.۲.۲. فرض کنید M و N مدل‌هایی از PA باشند. گوئیم N در M تعریف‌پذیر است هرگاه مجموعه تعریف‌پذیر $D_N \subset M$ در M و عناصر $0_N, 1_N \in D_N$، و توابع تعریف‌پذیر $+_N$ و $\cdot_N$ در M و همچنین رابطه تعریف‌پذیر $<_N \subset M^2$ در M موجود باشند به طوری که

$$.N = (D_N, +_N, \cdot_N, <_N, 0_N, 1_N)$$

با توجه به تعریف قبل، تبصره بعد شرط لازم و کافی بودن تعریف‌پذیری مدل N را در مدل M بیان می‌کند.

تبصره ۱۶.۲.۲. فرض کنید $M, N \models PA$ و N در M، تعریف‌پذیر و ϕ یک L_{PA}–فرمول باشد. در این‌صورت ϕ_N، فرمول بدست آمده از ϕ را نشان می‌دهد که در آن دامنه متغیرها به D_N محدود شده و همچنین جایگذاری $*_N$ به $*$ که $* \in \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ صورت گرفته است. با این شرایط برای هر $\overline{m} \in N$ داریم $N \models \phi(\overline{m}) \Longleftrightarrow M \models \phi_N(\overline{m})$.

تعریف ۱۷.۲.۲. فرض کنید $M \models PA$ و I یک بخش آغازین از M و S زیر مجموعه‌ای از I باشد. گوئیم S یک زیر مجموعه کدشده از I در M است هرگاه $a \in M$ موجود باشد به طوری که $S = \{n \in I : M \models n \in a\}$. که در آن $(n \in a \equiv \mathrm{p}(n) \mid a)$ و $\mathrm{p}(n)$ برابر n–امین عدد اول است. اگر $I = \omega$ آنگاه به طور خلاصه S یک زیر مجموعه کدشده در M نامیده می‌شود. مجموعه همه زیرمجموعه‌های کد شده در M را با نماد $SSy(M)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۸.۲.۲. فرض کنید $M \models PA$، I یک بخش آغازین سره از M است و $I \subset K \subset M$. همچنین فرض کنید $\phi(\overline{x})$ یک فرمول در زبان $L_{PA}(M) = L_{PA} \cup \{m : m \in M\}$ (اعضای M به عنوان نماد ثابت به زبان PA اضافه شده‌اند) باشد. اگر $D = \{n \in K : M \models \phi(n)\}$، آنگاه $D \cap I$ یک زیرمجموعه کدشده از I در M است.

برهان. ابتدا با استقرا روی a دیده می‌شود که برای هر $a \in M$ داریم:

$$M \models \exists y (\forall x < a)(\phi(x) \longleftrightarrow x \in y) \quad (\star).$$

برای $a = 0$، از آنجا که $x \in M$ موجود نیست که $M \vDash x < 0$، پس $(\star)$ برقرار است.

فرض کنید $(\star)$ برای a برقرار باشد. پس $y \in M$ موجود است که $M \vDash (\forall x < a)(\varphi(x) \longleftrightarrow x \in y)$.

دو حالت زیر را داریم:

(الف) $M \vDash \varphi(a)$. در این حالت قرار می‌دهیم: $z = \mathrm{p}(a) \cdot y$، که $\mathrm{p}(a)$، a–امین عدد اول است.

(ب) $M \vDash \neg\varphi(a)$. در این حالت ابتدا $k \in \omega$ را چنان بگیرید که $M \vDash \mathrm{p}(a)^k | y$ و $M \vDash \mathrm{p}(a)^{k+1} \nmid y$.

سپس قرار دهید $z = y / \mathrm{p}(a)^k$. در هر دو حالت $z \in M$ و داریم:

$M \vDash \exists z (\forall x < a+1)(\phi(x) \longleftrightarrow x \in z)$، زیرا $M \vDash \forall x (x < a+1 \to x = a \vee x < a)$.

از آنجایی که I یک بخش آغازین محض از M است، می‌توان $a \in M$ را طوری انتخاب کرد که $I <^M a$.
بنابراین با توجه به رابطه $(\star)$ عضو $d \in M$ موجود است که به ازای هر $b \in I$ داریم:
$M \models \phi(b) \Longleftrightarrow M \models b \in d$. و از آنجا طبق تعریف مجموعه K داریم:
$D \cap I = \{n \in I : M \models n \in d\}$. یعنی d مجموعه $D \cap I$ را کد می‌کند. $\square$

لم ۱۹.۲.۲. فرض کنید $M, N \models PA$ به طوری که N در M، $A-$تعریف‌پذیر باشد. در این صورت یک نشاننده یکتای $A-$تعریف‌پذیر در M مانند $\varepsilon : M \longrightarrow N$ وجود دارد که برد آن یک بخش آغازین از N است.

برهان. نگاشت $\varepsilon : M \longrightarrow N$ را به طوری که $\varepsilon(0) = 0_N$ و $\varepsilon(n+1) = \varepsilon(n) +_N 1_N$ در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم نگاشت ε، نشاننده مورد نظر است.

(الف) نشاننده بودنε:

تعبیر نمادهای $+, \cdot, <, 0, 1$ را در M مساوی خودشان قرار می‌دهیم. طبق فرض $\varepsilon(0) = 0^N$ و همچنین با استفاده از AX_6 داریم $\varepsilon(1) = \varepsilon(0+1) = \varepsilon(0) +_N 1^N = 0 + 1^N = 1^N$. حال با استقرا روی n ثابت می‌کنیم که $\varepsilon(m+n) = \varepsilon(m) +_N \varepsilon(n)$. برای $n = 0$ داریم $\varepsilon(m+0) = \varepsilon(m) = \varepsilon(m) +_N \varepsilon(0)$. فرض کنید (فرض استقرا) حکم برای $n = k$ برقرار باشد. یعنی $\varepsilon(m+k) = \varepsilon(m) +_N \varepsilon(k)$. حال برای $n = k+1$ داریم $\varepsilon(m+k+1) = \varepsilon(m+k) +_N 1^N = \varepsilon(m) +_N \varepsilon(k) +_N 1^N = \varepsilon(m) +_N \varepsilon(k+1)$.
اکنون با استقرا روی n نشان می‌دهیم که $\varepsilon(m \cdot n) = \varepsilon(m) \cdot_N \varepsilon(n)$. برای $n = 0$ داریم:
$\varepsilon(m \cdot 0) = \varepsilon(m) \cdot_N 0 = \varepsilon(m) \cdot_N \varepsilon(0)$. حال فرض (فرض استقرا) می‌کنیم که حکم برای $n = k$ برقرار باشد. یعنی $\varepsilon(m \cdot n) = \varepsilon(m) \cdot_N \varepsilon(k)$. برای $n = k + 1$ داریم:

$$\varepsilon(m \cdot (k+1)) = \varepsilon((m \cdot k) + (m \cdot 1)) = \varepsilon(m \cdot k) +_N \varepsilon(m \cdot 1) = \varepsilon(m) \cdot_N \varepsilon(k) +_N \varepsilon(m \cdot 1) =$$
$$(\varepsilon(m) \cdot_N \varepsilon(k)) +_N (\varepsilon(m) \cdot_N 1^N) = \varepsilon(m) \cdot_N (\varepsilon(k) +_N 1^N) = \varepsilon(m) \cdot_N \varepsilon(k+1).$$

حال ثابت می‌کنیم $m < n \Longleftrightarrow \varepsilon(m) <_N \varepsilon(n)$. فرض کنید $m < n$ در این‌صورت $k \in M$ وجود دارد به طوری که $n = m+k$ پس $\varepsilon(n) = \varepsilon(m+k)$ لذا $\varepsilon(n) = \varepsilon(m) +_N \varepsilon(k)$. در نتیجه $\varepsilon(m) <_N \varepsilon(n)$.

برعکس فرض خلف کنید $\varepsilon(n) <_N \varepsilon(m)$ اما $n \leqslant m$. اگر $n = m$ آنگاه $\varepsilon(n) = \varepsilon(m)$ که یک تناقض است! و اگر $n < m$ آنگاه طبق حالت رفت داریم $\varepsilon(n) <_N \varepsilon(m)$ که باز هم یک تناقض است!

اکنون برای یک به یک بودن ε فرض کنید $\varepsilon(m) = \varepsilon(n)$ اما $m \neq n$. در این‌صورت $m < n$ یا $n < m$ اگر $m < n$ آنگاه $\varepsilon(m) <_N \varepsilon(n)$ و اگر $n < m$ آنگاه $\varepsilon(n) <_N \varepsilon(m)$ که هر دو حالت تناقض هستند پس $m = n$.

(ب) منحصر به فرد بودن ε:

فرض کنید که μ نشاننده دیگری از M به N باشد در این صورت:

$$\mu(m) = \mu(m+0) = \mu(m) +_N \mu(0) \Longrightarrow \mu(0) = 0^N \Longrightarrow \mu(1) = 1^N.$$

حال با استقرا ثابت می‌کنیم که به ازای هر $m \in M$ داریم: $\varepsilon(m) = \mu(m)$. برای $m = 0$ داریم $\varepsilon(0) = 0^N = \mu(0)$. فرض کنید برای $m = k$ داشته باشیم $\varepsilon(m) = (k)$. برای $m = k + 1$ داریم:

$$\varepsilon(k+1) = \varepsilon(k) +_N 1^N = \mu(k) +_N 1^N = \mu(k) +_N \mu(1) = \mu(k+1).$$

(ج) با توجه به تعریف استقرائی ε و این که $+_N$ در M، $A-$تعریف‌پذیر است، ε نیز در M، $A-$تعریف‌پذیر است.

(د) برای اثبات $\varepsilon(M) \subseteq_e N$، فرض کنید $N \vDash b < \varepsilon(a)$ که $a \in M$. با استقرا روی a ثابت می‌کنیم که $b \in \varepsilon(M)$. اگر $a = 0$ آنگاه $N \vDash b < 0$ که امکان ندارد. حال فرض کنید که $N \vDash b < \varepsilon(a)$ نتیجه دهد که $b \in \varepsilon(M)$ و فرض کنید $N \vDash b < \varepsilon(a+1)$. در این صورت $b < \varepsilon(a+1) = \varepsilon(a) +_N 1$ و لذا $b = \varepsilon(a)$ یا $b < \varepsilon(a)$. اگر $b = \varepsilon(a)$ آنگاه $b \in \varepsilon(M)$ و اگر $b < \varepsilon(a)$ آنگاه طبق فرض استقرا $b \in \varepsilon(M)$. پس $\varepsilon(M) \subseteq_e N$. □

تعریف ۲۰.۲.۲. نشاننده ε لم قبل را نشاننده استاندارد M در N می‌نامیم.

۳.۲ پئانو و بازگشت

قضیه ۱.۳.۲. (قضیه 3.3 از مرجع [4])

تابع جزئی $f:\omega^k \longrightarrow \omega$، Σ_1–تعریف‌پذیر در ω است اگر و تنها اگر Σ_1–فرمولی مانند $\theta(X_1,...,X_k)$، موجود باشد به طوری که برای هر $\overline{x},y\in\mathbb{N}$ داشته باشیم: $\Gamma_f(\overline{x},y)\Leftrightarrow\omega\vDash\theta(\overline{x},y)$.

برهان. برای اثبات قضیه به لم و کد گذاری زیر نیاز داریم:

لم: برای هر Δ_0–فرمول $\theta(\overline{x})$، تابع زیر، یک تابع بازگشتی مقدماتی است.

$$\chi_\theta(\overline{x})=\begin{cases}1 & \omega\vDash\theta(\overline{x})\\ 0 & \omega\vDash\neg\theta(\overline{x})\end{cases}$$

همچنین کد گذاری زیر را برای چند تایی‌های اعداد طبیعی، در نظر بگیرید:

$\langle x_1,x_2\rangle=\dfrac{(x_1+x_2)((x_1+x_2+1)}{2}+x_2$ و $\langle x_1,...,x_{k+1}\rangle=\langle\langle x_1,...,x_k\rangle,x_{k+1}\rangle$.

این تابع کد گذاری، یک تابع بازگشتی مقدماتی و تعریف‌پذیر توسط یک Δ_0–فرمول است.

حال فرض کنید Σ_1–فرمول $\psi(x_1,...,x_k,y)$ موجود باشد که $\Gamma_f(\overline{x},y)\Leftrightarrow\omega\vDash\psi(\overline{x},y)$. Δ_0–فرمول $\varphi(\overline{x},y,\overline{z})$ موجود است که $\psi(\overline{x},y)=\exists\overline{z}\varphi(\overline{x},y,\overline{z})$. طبق لم، توابع $g(\overline{x})$ و $\mathrm{first}(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند، بازگشتی جزئی هستند.

$$g(\overline{x})=(\mu z)(\exists v,\overline{w}\leqslant z(\langle v,\overline{w}\rangle=z\wedge\varphi(\overline{x},v,\overline{w})));$$

$$\mathrm{first}(x)=(\mu y\leqslant x)(\exists z\leqslant x(\langle y,z\rangle=x));$$

در این صورت $\mathrm{first}(g(\overline{x}))$، برابر کوچکترین yای است که $\omega\vDash\psi(\overline{x},y)$ (اگر چنین yای موجود باشد.) و اگر چنین yای موجود نباشد آنگاه تعریف نشده است. از طرفی برای هر $\overline{x}\in\mathbb{N}^k$، $f(\overline{x})$=$\mathrm{first}(g(\overline{x}))$. بنابراین تابع f، متعلق به کلاس توابع بازگشتی جزئی است.

برعکس: توابع $0(x)$، تابع تالی $s(x)=x+1$ و تابع تصویر $\pi_i^n(\overline{x})=x_i$، به ترتیب توسط Σ_1–فرمول‌های $y=0$، $y=x+1$ و $y=x_i$، تعریف می‌شوند، و نشان داده می‌شود که کلاس توابع جزئی $f:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$،

شامل توابع 0، تالی و تصاویر بوده و تحت ترکیب توابع و قاعده بازگشت و قاعده کمینه ساز، بسته است. □

پس با توجه به قضیه بالا توابع بازگشتی، Σ_1 هستند.

نتیجه ۲.۳.۲. $A \subseteq \omega^k$ یک مجموعه $r.e.$ است اگر و تنها اگر Σ_1- فرمول $\psi(\overline{x})$ موجود باشد که برای هر $\overline{a} \in \omega^k$ داشته باشیم $\overline{a} \in A \Longleftrightarrow \omega \models \psi(\overline{a})$.

برهان. اگر A، $r.e.$ باشد آنگاه تابع بازگشتی جزئی $f : \omega^k \longrightarrow \omega$ موجود است که $A = \mathtt{Dom}(f)$. در این‌صورت برای $\overline{x} \in \omega^k$ داریم $\overline{x} \in A \Longleftrightarrow \omega \models \exists y \Gamma_f(\overline{x}, y)$. طبق قضیه قبل$\Gamma_f(\overline{x}, y)$ دارای معادل Σ_1 است. پس $\exists y \Gamma_f(\overline{x}, y)$ معادل یک Σ_1-فرمول مانند $\psi(\overline{x})$ است.

برعکس: فرض کنید A توسط Σ_1-فرمول ψ تعریف شود. تابع $f(\overline{x})$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(\overline{x}) = \begin{cases} 0 & \omega \models \psi(\overline{x}) \\ \\ \infty & \mathtt{otherwise} \end{cases}$$

در نتیجه داریم $\Gamma_f(\overline{x}, y) \Longleftrightarrow \omega \models \psi(\overline{x}) \wedge y = 0$. طبق قضیه قبل f بازگشتی جزئی است و چون $A = \mathtt{Dom}(f)$، لذا مجموعه A، $r.e.$ است. □

نتیجه ۳.۳.۲. $A \subseteq \omega^k$ بازگشتی است اگر و تنها اگر Σ_1-فرمول $\phi(\overline{x})$ و Π_1-فرمول $\psi(\overline{x})$ موجود باشند که $\overline{x} \in A \Longleftrightarrow \omega \models \phi(\overline{x}) \Longleftrightarrow \omega \models \psi(\overline{x})$. به عبارت دیگر مجموعه‌های بازگشتی، Δ_1 هستند.

برهان. فرض کنید A بازگشتی است، پس A و A^c هر دو $r.e.$ هستند. چون A $r.e.$ است پس Σ_1-فرمول ϕ موجود است که شرط برقرار است. چون A^c $r.e.$ است پس Σ_1-فرمول ψ_1 موجود است که شرط برقرار است. قرار دهید $\psi = \neg\psi_1$. برای جهت دیگر رابطه از فرض داریم که A, A^c هر دو $r.e.$ هستند، پس A بازگشتی است. □

تعریف ۴.۳.۲. تابع f به طور اثبات‌پذیر بازگشتی در PA نامیده می‌شود هرگاه یک Σ_1-فرمول $\theta(\overline{x}, y)$ موجود باشد که $PA \vdash \forall \overline{x} \exists! y \theta(\overline{x}, y)$ و f در همه مدل‌های PA به صورت زیر تعریف شود:

$f(\overline{x})$ عبارت است از یگانه yای که Σ_1–فرمول $\theta(\overline{x},y)$ برقرار باشد.
توابع بازگشتی مقدماتی به طور اثبات‌پذیر بازگشتی هستند. در واقع به طور اثبات‌پذیر بازگشتی در زیر نظریه $I\Sigma_1$ از PA هستند. (قضیه 1.53 از [2])

تبصره ۵.۳.۲. فرض کنید $M, N \models PA$ به طوری که N در M تعریف‌پذیر و ε نشاننده استاندارد M در N باشد. اگر $f(x) = y$ یک تابع به طور اثبات‌پذیر بازگشتی در PA باشد آنگاه به ازای هر $m \in M$ داریم $M \models f_N(\varepsilon(m)) = \varepsilon(f(m))$.

برهان. فرض کنید $M \models f(m) = n$. با توجه به نشاننده بودن ε داریم $\varepsilon(M) \models f(\varepsilon(m)) = \varepsilon(n)$. چون $f(x) = y$ یک Σ_1–فرمول است پس توسط فرمولی مثل $\exists z\phi(x,y,z)$ تعریف می‌شود که $\phi \in \Delta_0$. چون $\varepsilon(M) \subseteq_e N$ پس $\varepsilon(M) <_{\Delta_0} N$. لذا $N \models f(\varepsilon(m)) = (n)$. ولی ε در M تعریف‌پذیر است، بنابراین $M \models f(m) = n \longrightarrow f_N(\varepsilon(m)) = \varepsilon(n)$. □

تعریف ۶.۳.۲. یک کدگذاری گودل برای زبان L_{PA}، تابعی است یک به یک از مجموعه رشته‌های متناهی از نمادها به مجموعه اعداد طبیعی که دارای شرایط زیر باشد:
(الف) g یک تابع محاسبه‌پذیر باشد،
(ب) برد g زیرمجموعه‌ای محاسبه‌پذیر از ω باشد،
(ج) تابع وارون g یک تابع محاسبه‌پذیر باشد.

این کدگذاری یکی از ایده‌های بزرگ گودل بوده است، که ما را قادر می‌سازد به جای کار کردن با L_{PA}–فرمول ϕ با کد آن که با نماد $\ulcorner\phi\urcorner$ نشان داده می‌شود و یک عدد طبیعی است، کار کنیم. راه‌های متعددی برای این عدددهی وجود دارد. یکی از این روش‌ها به قرار زیر است:
نمادهای منطقی $\exists$، $\forall$، $\longleftrightarrow$، $\longrightarrow$، $\wedge$، $\vee$، $\neg$ و $L_{PA} = \{+,\cdot,0,1,<\}$ و پرانتزهای (و) و نماد تساوی $=$ و متغیرهای $v, v', v'', v''', \ldots$ را در نظر می‌گیریم. پس مجموعه الفبا مساوی است با:

$$\text{الفبا} = \{+,.,0,1,<,\neg,\vee,\wedge,\longrightarrow,\longleftrightarrow,\forall,\exists,(,),=,v,',\sharp\}.$$

$\sharp$ نمادی است که برای جدا کردن فرمول‌ها در برهان‌ها استفاده می‌شود. لذا ۱۸ نماد برای الفبا وجود دارد. اعداد $0, 1, 2, ..., 17$ را به ترتیب از چپ به راست برای آنها اختصاص می‌دهیم و قرار می‌دهیم: $\ulcorner s_0, ..., s_k \urcorner = \Sigma_{i=0}^{k} 18^i (n_{s_i} + 1)$ که n_{s_i} کد گودل s_i است. همچنین اگر $p = (\sigma_0, ..., \sigma_n)$ برهان باشد آنگاه $\ulcorner p \urcorner = \ulcorner \sigma_0 \sharp \sigma_1 \sharp ... \sharp \sigma_n \urcorner$.

قرارداد:

فرض کنید T، یک نظریه شامل PA باشد:

- $\mathrm{p}(x) = y$ را L_{PA}–فرمول تعریف کننده تابع بازگشتی مقدماتی x به x–امین عدد اول در نظر می‌گیریم.
- $(z)_x = y$ را L_{PA}–فرمول تعریف کننده تابع بازگشتی مقدماتی زیر در نظر می‌گیریم: $(z)_x = \mu z \leqslant z(\mathrm{p}(x)^y \mid z \wedge \mathrm{p}(x)^{y+1} \nmid z)$.
- $x \in y$ را L_{PA}–فرمول تعریف کننده رابطه $\mathrm{p}(x)|y$ در نظر می‌گیریم.
- برای هر ترم $\delta(x)$، $\ulcorner \delta(\underline{x}) \urcorner = y$ را L_{PA}–فرمول تعریف کننده تابع بازگشتی مقدماتی n به $\ulcorner \delta(n) \urcorner$ در نظر می‌گیریم که در آن، $\underline{x} = 1 + (1 + (+ ...))$ به تعداد x تا 1 می‌باشد.
- T^G را مساوی مجموعه $\{\ulcorner \phi \urcorner : \phi \in T\}$ در نظر می‌گیریم.
- $Pr_T(x, y)$ بیان می‌کند که گزاره با کد x دارای برهانی با کد y در نظریه T است. قرار دهید: $Pr_T(x) \equiv \exists y Pr_T(x, y)$، به عبارت دیگر، x، کد گزاره‌ای اثبات‌پذیر در نظریه T است. به ویژه $Pr_{\emptyset}(x)$ بیان می‌کندکه x در منطق محمولات اثبات‌پذیر است. و سرانجام $\mathtt{Con}_T$ را فرمول $\neg Pr_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ در نظر بگیرید.

تعریف ۷.۳.۲. فرض کنید $M \models PA$. یک نوع روی M مجموعه‌ای است مثل $p(\overline{x})$ از فرمول‌های $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ ($\overline{x}$ یک چندتایی ثابت از متغیرها و $\overline{a} \in M$ یک چندتایی ثابت از پارامترهاست) به طوری که

هر زیر مجموعه متناهی $p(\overline{x})$ به طور یکنواخت در M صدق‌پذیر است. یعنی برای هر زیر مجموعه متناهی $\phi_1(\overline{x},\overline{a}),...,\phi_k(\overline{x},\overline{a})$ از $p(\overline{x})$، $M \models \exists\overline{x} \bigwedge_{i=1}^{k} \phi_i(\overline{x},\overline{a})$.

نوع $p(\overline{x})$ بازگشتی گفته می‌شود هرگاه مجموعه $\{\ulcorner\phi(\overline{x},\overline{y})\urcorner : \phi(\overline{x},\overline{a}) \in p(\overline{x})\} \subseteq \omega$ بازگشتی باشد. ($\overline{y}$ یک چندتایی ثابت از متغیرهای مجزا از $\overline{x}$ است که به جای $\overline{a}$ قرار گرفته است). گوئیم نوع $p(\overline{x})$ در M تحقق می‌یابد هرگاه $\overline{b} \in M$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $\phi(\overline{x},\overline{a}) \in p(\overline{x})$ داشته باشیم $M \models \phi(\overline{b},\overline{a})$.

تعریف ۸.۳.۲. فرض کنید $M \models PA$. مدل M را به طور بازگشتی اشباع‌شده نامند هرگاه هر نوع بازگشتی روی M در M تحقق یابد.

قرارداد

در فصل‌های بعدی منظور از حروف M, N، مدل‌های PA خواهد بود مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

فصل ۳

مدل‌های $\emptyset$−تعریف‌پذیر در M

۱.۳ مدل‌های $\emptyset$−تعریف‌پذیر

در این فصل مدل‌های $\emptyset$−تعریف‌پذیر در M بررسی می‌شوند. خواهیم دید که هر مدل $\emptyset$−تعریف‌پذیر N در M، یکریخت با M است هرگاه $\omega \succ M$ و N هم‌ارز مقدماتی با M باشد.

تعریف ۱.۱.۳. مجموعه Ψ از زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر M، به طور یکنواخت تعریف‌شده نامیده می‌شود، هرگاه فرمول $\phi(x,\overline{y})$ موجود باشد به طوری که:

$$\Psi \subset \{\{b \in M : M \models \phi(b,\overline{a})\} : \overline{a} \in M\}.$$

گزاره ۲.۱.۳. مجموعه همه زیرمجموعه‌های $\emptyset$−تعریف‌پذیر M، به طور یکنواخت تعریف‌شده نیستند.

برهان. فرض کنید چنین نباشد و توسط فرمول $\phi(x,\overline{y})$، به طور یکنواخت تعریف شوند. با استفاده از روش کدگذاری می‌توان چندتایی $\overline{y}$ را تک متغیر y فرض کرد. $\psi(x)$ را فرمول $\neg\phi(x,x)$ تعریف کنید. در این‌صورت طبق فرض، عنصر $a \in M$ وجود دارد به طوری که $M \models \forall x(\psi(x) \longleftrightarrow \phi(x,a))$. بنابراین داریم $M \models \psi(a) \longleftrightarrow \phi(a,a)$. اما این متناقض با تعریف فرمول ψ است! $\square$

لم ۳.۱.۳. فرض کنید N، $\emptyset$−تعریف‌پذیر در M و نشاننده استاندارد $\varepsilon : M \longrightarrow N$ روی $\mathrm{dcl}_M(\emptyset)$ مقدماتی باشد. دراین‌صورت نگاشت ε، یک یکریختی است.

برهان. ابتدا نشان داده می‌شود که نگاشت ε، مقدماتی است. فرض کنید چنین نباشد. پس عناصر $a_1, ..., a_n \in M$ و فرمول $\phi(x_1, ...x_n)$ وجود دارند به طوری که $N \models \neg\phi(\varepsilon(a_1), ..., \varepsilon(a_n))$ و $M \models \phi(a_1, ..., a_n)$. از آنجایی که N، $\emptyset$−تعریف‌پذیر در M است داریم:

$$M \models \exists x_1, ..., \exists x_n(\phi(x_1, ..., x_n) \wedge \neg\phi_N(\varepsilon(x_1), ..., \varepsilon(x_n))).$$

حال چون $M \succ \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$، پس عناصر $m_1, ...m_n \in \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$ وجود دارند به طوری که $M \models \phi(m_1, ..., m_n) \wedge \neg\phi_N(\varepsilon(m_1), ..., \varepsilon(m_n))$. بنابراین $N \models \neg\phi(\varepsilon(m_1), ..., \varepsilon(m_n))$ و $M \models \phi(m_1, ..., m_n)$. اما این متناقض با مقدماتی بودن نگاشت ε روی $\mathrm{dcl}_M(\emptyset)$ می‌باشد!

حال فرض کنید $\varepsilon(M) \prec_{\neq} N$ و عنصر $b \in N \setminus \varepsilon(M)$ و فرمول دلخواه و بدون پارامتر $\phi(x)$ را انتخاب کنید. با توجه به مقدماتی بودن ε و اینکه $N \models \exists a(\forall x < b)(\phi(x) \longleftrightarrow x \in a)$ (طبق برهان لم ۱۸.۲.۲)، داریم:

$$M \models \phi(c) \Longleftrightarrow N \models \phi(\varepsilon(c)) \Longleftrightarrow N \models \varepsilon(c) \in a.$$

اما N در M تعریف‌پذیر است، پس $M \models \phi(c) \Longleftrightarrow M \models \varepsilon(c) \in_N a$. بنابراین همه زیر مجموعه‌های $\emptyset$−تعریف‌پذیر M، به طور یکنواخت تعریف می‌شوند که یک تناقض است! پس $\varepsilon(M) = N$. با توجه به این که نگاشت ε، یک یکریختی بین $\varepsilon(M)$ و M برقرار می‌کند، داریم $M \cong N$. □

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنید $M \equiv \omega$ و N در M، $\emptyset$−تعریف‌پذیر و هم‌ارز مقدماتی با آن باشد. در این صورت، N به طور تعریف‌پذیر یکریخت با M است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathrm{dcl}_M(\emptyset) = \omega$. فرض کنید $b \in \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$، پس فرمول $\phi(x)$ وجود دارد به طوری که $M \models \exists! x\phi(x)$ و $M \models \phi(b)$. با توجه به $M \equiv \omega$ داریم $\omega \models \exists! x\phi(x)$ و چون $\omega \subseteq M$ پس $b \in \omega$ و بنابراین $\mathrm{dcl}_M(\emptyset) \subseteq \omega$. از طرف دیگر، هر $n \in \omega$ توسط قرمول $v = \underline{n}$ در M تعریف پذیر است. در نتیجه $\mathrm{dcl}_M(\emptyset) = \omega$ و بنابراین $M \succ \omega$. اکنون نشان می‌دهیم که نگاشت ε روی ω،

مقدماتی است، یعنی برای هر $\overline{n} \in \omega$ و هر فرمول $\phi(\overline{v})$ داریم $M \models \phi(\overline{n}) \iff N \models \phi(\varepsilon(\overline{n}))$. از آنجا که $N \equiv M \equiv \omega \cong \varepsilon(\omega)$، پس داریم:

$$M \models \phi(\overline{n}) \iff \omega \models \phi(\overline{n}) \iff \varepsilon(\omega) \vDash \varphi(\varepsilon(\overline{n})) \iff N \vDash \varphi(\varepsilon(\overline{n})).$$

$\square$

قضیه قبل به بیانی دیگر

فرض کنید N در M، $\emptyset$-تعریف‌پذیر باشد. اگر $\omega \prec M$ و $M \equiv N$ باشد آنگاه N به طور تعریف‌پذیر یکریخت با M است.

با توجه به قضیه قبل، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۵.۱.۳. اگر N در ω، $\emptyset$-تعریف پذیر و هم ارز مقدماتی با آن باشد، آنگاه $N \cong \omega$.

فصل ۴

مدل‌های M−تعریف‌پذیر در M

۱.۴ مدل‌های M−تعریف‌پذیر در M

در فصل ۳، مدل‌های $\emptyset$−تعریف‌پذیر در مدل M، مورد بررسی قرار گرفتند و نشان داده شد که تحت شرایطی، همه مدل‌های $\emptyset$−تعریف‌پذیر در M، با M یکریخت هستند.
در این فصل مدل‌های M−تعریف‌پذیر در M، مطالعه می‌شوند و خواهیم دید که اگر M−تعریف‌پذیری با $\emptyset$−تعریف‌پذیری جایگزین شود، آنگاه قضیه ۴.۱.۳، درست نخواهد بود.

لم ۱.۱.۴. اگر M یک مدل نااستاندارد و N در M تعریف‌پذیر باشد آنگاه $SSy(M) = SSy(N)$.

برهان. فرض کنید نگاشت ε، نشاننده استاندارد M در N و D یک مجموعه کدشده در M، توسط a باشد. همچنین فرض کنید $n \in D$ دلخواه و $M \models n \in a$. $n \in a$ یک Σ_1−فرمول به صورت $\exists x(a = x \cdot \mathrm{p}(n))$ می‌باشد که در آن عبارت $(a = x \cdot \mathrm{p}(n))$، یک Δ_o−فرمول است. با توجه به این که $\varepsilon(M) \prec_{\Delta_0} N$ و نگاشت ε، یک خودریختی بین M و $\varepsilon(M)$ برقرار می‌کند، داریم $M \prec_{\Delta_0} N$. پس

$$\exists x \in M;\ M \models x \cdot \mathrm{p}(n) \Longrightarrow \exists x \in N;\ N \models x \cdot \mathrm{p}(n).$$

و در نتیجه $N \models n \in a$. بنابراین D یک مجموعه کدشده در N هم است. برعکس فرض کنید $D \subset \omega$ یک مجموعه کدشده در N، توسط a باشد. از آنجا که $\varepsilon(M) \neq \omega$ یک بخش آغازین از N است، می‌توانیم a را طوری انتخاب کنیم که $a \in \varepsilon(M)$. همچنین $\varepsilon(M) \prec_{\Delta_0} N$ و $y \in x$ یک Σ_1−فرمول

است. بنابراین $a \in \varepsilon(M)$، D را در $\varepsilon(M)$ کد می‌کند. و چون نگاشت ε، یک خودریختی بین M و $\varepsilon(M)$ برقرار می‌کند، D در M کدشده است. $\square$

لم ۲.۱.۴. فرض کنید M مدلی برای PA باشد و $Th(M)^G$ در M توسط $a \in M$، کد شود. در این صورت، عنصر نااستاندارد n^* وجود دارد به طوری که $M \models Con_{(x \in a \wedge x \leqslant n^*)}$، که در آن $Con_{(x \in a \wedge x \leqslant n^*)}$، فرمول بدست آمده از Con_T را نشان می‌دهد که در آن جایگذاری $(x \in a \wedge x \leqslant n^*)$ به جای $x \in T$، صورت گرفته است.

برهان. فرض کنید $\varphi_1, ..., \varphi_m$، جملاتی از $Th(M)$ باشند. از آنجا که M، مدلی برای PA است داریم:

$$M \models \mathtt{Pr}_\emptyset(\ulcorner \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)\urcorner) \longrightarrow \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m).$$

(زیرا اگر $M \models \neg(\mathtt{Pr}_\emptyset(\ulcorner \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)\urcorner) \longrightarrow \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m))$ آنگاه با استفاده از هم‌ارزی $p \to q \equiv \neg p \vee q$ داریم $M \models \neg(\neg(\mathtt{Pr}_\emptyset(\ulcorner \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)\urcorner) \vee \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m))$. در نتیجه $M \models \mathtt{Pr}_\emptyset(\ulcorner \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)\urcorner) \wedge (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)$ پس $\neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)$ در منطق محمولات اثبات‌پذیر است بنابراین در هر مدلی درست است به ویژه در $M \models PA$. در نتیجه $M \models \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)$. اما این متناقض با $M \models (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)$ است). چون $M \models \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ پس $M \models \mathtt{Con}_{\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}}$. از آنجا که $a \in M$، $Th(M)^G$ را در M کد می‌کند، به ازای هر $n \in \omega$ داریم $M \models \mathtt{Con}_{(x \in a \wedge x \leqslant n)}$. و در نهایت با استفاده از لم لبریز، عنصر نااستاندارد n^* وجود دارد به طوری که $M \models \mathtt{Con}_{(x \in a \wedge x \leqslant n^*)}$. $\square$

گزاره ۳.۱.۴. فرض کنید M، مدل نااستاندارد PA باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارز هستند.

(الف) مدل به طور بازگشتی اشباع‌شده N وجود دارد به طوری که در M، تعریف‌پذیر و هم‌ارز مقدماتی با آن است.

(ب) $Th(M)^G$، یک مجموعه کدشده در M است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که (الف)، (ب) را نتیجه می‌دهد. فرض کنید مدل به طور بازگشتی اشباع‌شده N وجود دارد که هم‌ارز مقدماتی با M و تعریف‌پذیر در آن است. نوع بازگشتی زیر را که

توسط $a \in N$، در N تحقق یافته است در نظر بگیرید:

$$\{\ulcorner\varphi\urcorner \in x \leftrightarrow \varphi\} : \text{برای همه } L_{PA}\text{–جمله‌ها.}$$

با توجه به تعریف نوع بازگشتی فوق، a، مجموعه $Th(M)^G$ را نیز کد می‌کند. پس بنابر لم ۱.۱.۴، $Th(M)^G$ نیز در M کد شده است.

حال برعکس فرض کنید $Th(M)^G$ توسط a در M کد می‌شود. پس $\varphi \in Th(M)^G$، معادل با $M \vDash \ulcorner\varphi\urcorner \in a$ است. بنابر لم ۲.۱.۴، عضو نااستاندارد n^* وجود دارد به طوری که $M \models \mathtt{Con}_{(x\in a \wedge x\leqslant n^*)}$.
اکنون با استفاده از صوری سازی ساختار هنکین، می‌توانیم مجموعه تعریف‌پذیر H از (کدهای) جمله‌ها را طوری بسازیم که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) H شامل $Th(M)$ است.

(۲) H سازگار و کامل است.

(۳) H یک نظریه هنکین است.

حال با استفاده از H، مدل تعریف‌پذیر N در M را می‌توانیم طوری تعریف کنیم به طوری که برای هر $a_1, ..., a_m \in N$ و برای هر فرمول $\varphi(x_1, ..., x_m)$ داشته باشیم:

$$N \vDash \varphi(a_1, ..., a_m) \iff M \vDash \ulcorner\varphi(a_1, ..., a_m)\urcorner \in H.$$

حال نشان می‌دهیم مدل N، به طور بازگشتی اشباع‌شده است. فرض کنید $r(x, b)$، یک نوع بازگشتی در N و $\psi_1, \psi_2, ...$، یک شمارش بازگشتی از فرمول‌های در $r(x, b)$ باشد. در این صورت برای هر $n \in \omega$ داریم، $N \vDash \exists x(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(x, b))$. بنابراین $M \vDash \ulcorner\exists x(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(x, b))\urcorner \in H$ برای هر $n \in \omega$ برقرار است. حال با استفاده از لبریز، عضو نااستاندارد $n^* \in M$ وجود دارد به طوری که $M \vDash \ulcorner\exists x(\bigwedge_{i=1}^{n^*} \psi_i(x, b))\urcorner \in H$. این بدین معنی است که عضو $d \in N$ وجود دارد به طوری که $N \vDash \varphi(d, b)$ برای همه $\varphi(x, b)$های متعلق به $r(x, b)$، برقرار است. بنابراین نوع $r(x, b)$، توسط این d تحقق می‌یابد و در نتیجه مدل N، به طور بازگشتی اشباع‌شده است.

□

نتیجه ۴.۱.۴. اگر M مدلی برای PA باشد که $Th(M)^G \in SSy(M)$، آنگاه مدل‌های M_* و N_* وجود دارند به طوری که N_* در M_*، تعریف‌پذیر است و $N_* \equiv M_*$ و $N_* \ncong M_*$.

برهان. فرض کنید $a \in M$، $Th(M)^G$ را در M کد می‌کند. همچنین فرض کنید M_*، بستار تعریف‌پذیر مجموعه $\{a\}$، یعنی $\mathrm{dcl}_M(\{a\})$ باشد. در این صورت $M_* \prec M$. از آن جایی که نوع بازگشتی $\{\forall x \exists! y \phi(x,y) \longrightarrow \forall y[\phi(a,y) \longrightarrow y < z] : \phi(x,y)$ یک L_{PA}–فرمول است$\}$ در M_*، تحقق نمی‌یابد، M_* به طور بازگشتی اشباع‌شده نیست. چون $M_* \prec M$ پس $Th(M)^G$ در M_*، کد شده است. بنابراین طبق گزاره ۳.۱.۴ یک مدل به طور بازگشتی اشباع‌شده N_* که در M_*، تعریف‌پذیر و هم‌ارز مقدماتی با آن است، وجود دارد. $\square$

تبصره ۵.۱.۴. فرض کنید M, N، مدل‌های به طور بازگشتی اشباع‌شده باشند. اگر $M \equiv N$ و $SSy(M) = SSy(N)$، آنگاه M و N یکریخت هستند.

برهان. این همان قضیه 2.7 از [9] می‌باشد. $\square$

گزاره ۶.۱.۴. فرض کنید M، یک مدل به طور بازگشتی اشباع‌شده شمارا باشد. در این صورت هر مدل تعریف‌پذیر در M که هم‌ارز مقدماتی با آن باشد با M یکریخت است.

برهان. هر نوع بازگشتی در N، یک نوع بازگشتی در M نیز است. بنابراین در N نیز تحقق می‌یابد. پس N نیز به طور بازگشتی اشباع‌شده است. با توجه به لم ۱.۱.۴، $SSy(M) = SSy(N)$ و همچنین طبق فرض $M \equiv N$، در نتیجه طبق تبصره ۵.۱.۴، M و N، یکریخت هستند. $\square$

قضیه ۷.۱.۴. فرض کنید M، مدلی برای PA باشد.

(الف) اگر $Th(M)^G \in SSy(M)$، آنگاه مدل تعریف‌پذیر N در M که $M \equiv N$، وجود دارد که به طور تعریف‌پذیر یکریخت با M نیست.

(ب) فرض کنید M به طور بازگشتی اشباع‌شده و شمارا باشد. آنگاه مدل تعریف‌پذیر N در M که $M \equiv N$، وجود دارد به طوری که

(ب۱) $M \cong N$

(ب۲) N به طور تعریف‌پذیر، یکریخت با M نیست.

برهان. (الف) فرض کنید $a \in M$، $Th(M)^G$ را در M کد می‌کند. M_* را بستار تعریف‌پذیر مجموعه $\{a\}$ در M در نظر بگیرید. مشابه برهان نتیجه ۴.۱.۴، می‌توانیم مدل تعریف‌پذیر N_* در M_* را انتخاب کنیم به طوری که $M_* \equiv N_*$ و $M_* \ncong N_*$. به ویژه N_* و M_* به طور تعریف‌پذیر یکریخت در M_* نیستند. فرض کنید $\phi(x)$، $L_{PA}(M_*)$–فرمول تعریف کننده N_* باشد. قرار دهید،
$N = \{m : M \models \phi(m)\}$. چون $M_* \prec M$، N یک مدل $Th(M)$ نیز است. اکنون نشان می‌دهیم که M به طور تعریف‌پذیر یکریخت با N نیست. فرض کنید چنین نباشد. پس L_{PA}–فرمول $\psi(x, y, z)$ و یک پارامتر $b \in M$، وجود دارند که فرمول $\psi(x, y, b)$، یکریختی تعریف‌پذیر $\sigma(x) = y$ را بین M و N، تعریف می‌کند. چون $M_* \prec M$، عنصر $b_* \in M_*$ وجود دارد به طوری که $\psi(x, y, b_*)$ یک یکریختی تعریف‌پذیر بین M_* و N_* برقرار می‌سازد. اما این متناقض با $M_* \ncong N_*$ است!
(ب) چون M، به طور بازگشتی اشباع‌شده است، پس $a \in M$ وجود دارد که $Th(M)^G$ را در M کد می‌کند. فرض کنید N مدل بدست آمده در (الف) باشد. در این صورت N، به طور تعریف‌پذیر، یکریخت با M نیست، اما طبق گزاره ۶.۱.۴ دیدیم که M و N، یکریخت هستند. $\square$

با توجه به نتایج این فصل و قضیه ۴.۱.۳ می‌توان نتیجه زیر را برای توسیع‌های مقدماتی شمارا از ω ارایه نمود.

نتیجه ۸.۱.۴. فرض کنید $M \succ \omega$ یک مدل شمارا باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند.

(۱) اگر $N \equiv M$ در M، $\emptyset$–تعریف‌پذیر باشد، آنگاه $N \cong M$ (قضیه ۴.۱.۳).

(۲) اگر $Th(\omega)^G \notin SSy(M)$، آنگاه هیچ مدل M–تعریف‌پذیر به طور بازگشتی اشباع‌شده که هم‌ارز مقدماتی با M باشد، وجود ندارد (گزاره ۳.۱.۴).

(۳) اگر $Th(\omega)^G \in SSy(M)$، آنگاه یک مدل M–تعریف‌پذیر مانند N، وجود دارد که با M هم‌ارز مقدماتی است اما به طور تعریف‌پذیر یکریخت با M نیست (قضیه ۷.۱.۴).

(۴) اگر M به طور بازگشتی اشباع‌شده باشد، آنگاه M یک مدل تعریف‌پذیری مانند N دارد که دارای خصوصیات زیر است:

(الف) $N \equiv M$

(ب) $N \cong M$

(ج) N به طور تعریف‌پذیر یکریخت با M نیست (قضیه ۷.۱.۴).

فصل ۵

توسیع قضیه تننباوم

۱.۵ توسیع قضیه تننباوم

فرض کنید که ω مدل استاندارد $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$ باشد. قضیه مشهور تننباوم (۱۹۵۹) بیان می‌کند که اگر M، یک مدل تعریف‌پذیر در مدل استاندارد ω با اعمال بازگشتی $+_M$ یا $\cdot_M$ باشد، آنگاه $M \cong \omega$. در این فصل این حقیقت، برای حالتی که به جای ω یک مدل نااستاندارد قرار گرفته باشد، توسعه داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنید B، زیرمجموعه‌ای از M^k و n یک عدد طبیعی ثابت باشد. گوئیم B، $\triangle_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است اگر Σ_{n+1}–فرمول $\varphi(\overline{x})$ و Π_{n+1}–فرمول $\psi(\overline{x})$ (با پارامترهای از M) موجود باشند، به طوری که برای هر توسیع انتهایی $M^* \succ_{\Sigma_n} M$ و برای هر $\overline{m} \in M^k$:

$$\overline{m} \in B \Longleftrightarrow M^* \vDash \varphi(\overline{m}) \Longleftrightarrow M^* \vDash \psi(\overline{m}).$$

همچنین فرض کنید $f : M^k \longrightarrow M$ یک تابع باشد. آنگاه f را $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر گوئیم اگر Σ_{n+1}–فرمول $\varphi(\overline{x}, y)$ (با پارامترهای از M) موجود باشد، به طوری که برای هر توسیع انتهایی $M^* \succ_{\Sigma_n} M$ داشته باشیم:

(۱) برای هر $\overline{m} \in M$، $M^* \vDash \exists! y \varphi(\overline{m}, y)$ و

(۲) برای هر $\overline{m}, n \in M$، $f(\overline{m}) = n$ اگر و تنها اگر $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, n)$.

با توجه به تعریف، شرط (۱) خوش‌تعریفی تابع f و شرط (۲) تعریف‌پذیری تابع f را در مدل M^* نشان می‌دهد.

نکته:

تعریف قبل تعمیمی از مطلب زیر است.
مجموعه $B \subseteq \mathbb{N}^k$ بازگشتی است، اگر و تنها اگر Σ_1–فرمول $\varphi(\overline{x})$ و Π_1–فرمول $\psi(\overline{x})$، موجود باشند به طوری که به ازای هر $\overline{n} \in \mathbb{N}^k$:

$$\overline{n} \in B \iff \omega \vDash \varphi(\overline{n}) \iff \omega \vDash \psi(\overline{n}).$$

از آن جایی که هر مدل $M \vDash PA$، یک توسیع انتهایی Δ_0–مقدماتی از ω است، به ازای هر $\overline{n} \in \mathbb{N}^k$ داریم، $\overline{n} \in B \iff M \vDash \varphi(\overline{n}) \iff M \vDash \psi(\overline{n})$. پس هر مجموعه بازگشتی $\Delta_1(\omega)$–تعریف‌پذیر است.

لم ۲.۱.۵. اگر f، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر باشد، آنگاه f توسط یک Π_{n+1}–فرمول نیز، که در شرایط (۱) و (۲) از تعریف فوق صدق می‌کند، تعریف می‌شود.

برهان. فرض کنید f، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر باشد. در این صورت Σ_{n+1}–فرمول $\varphi(\overline{x}, y)$ چنان موجود است که:

(۱) برای هر $\overline{m} \in M$، $M^* \vDash \exists! y \varphi(\overline{m}, y)$.

(۲) برای هر $\overline{m}, n \in M$ ، $f(\overline{m}) = n$ اگر و تنها اگر $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, n)$.

حال قرار دهید، $\varphi(\overline{x}, y) = \exists \overline{z} \psi(\overline{x}, y, \overline{z})$ که $\psi \in \Pi_n$. Π_{n+1}–فرمول زیر تابع f را در M تعریف می‌کند:

$$\theta(\overline{x}, y) \equiv \forall \overline{z} \forall v (\psi(\overline{x}, v, \overline{z}) \longrightarrow v = y).$$

نشان می‌دهیم این فرمول در شرایط (۱) و (۲) تعریف قبل صدق می‌کند.

بررسی شرط (۱): فرض کنید $\overline{m} \in M$. در این صورت، $M^* \vDash \exists! y\varphi(\overline{m}, y)$. اگر $M^* \nvDash \exists y\theta(\overline{m}, y)$، آنگاه $M^* \vDash \forall y(\neg\theta(\overline{m}, y))$. طبق تعریف θ، $M^* \vDash \forall y(\exists \overline{z}\exists v(\psi(\overline{m}, v, \overline{z}) \wedge v \neq y))$. پس $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, y)$ و $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, v)$، که تناقض است.

حال فرض کنید، $M^* \vDash \theta(\overline{m}, y_1)$ و $M^* \vDash \theta(\overline{m}, y_2)$ که $y_1 \neq y_2$. طبق تعریف θ، $M^* \vDash \forall \overline{z}\forall v(\psi(\overline{m}, v, \overline{z}) \longrightarrow v = y_1)$ و $M^* \vDash \forall \overline{z}\forall v(\psi(\overline{m}, v, \overline{z}) \longrightarrow v = y_2)$. پس $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, y_1)$ و $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, y_2)$ و $y_1 \neq y_2$ که این تناقض است.

بررسی شرط (۲): فرض کنید، $f(\overline{m}) = n$ اما $M^* \nvDash \theta(\overline{m}, n)$. از اینکه $f(\overline{m}) = n$ نتیجه می‌گیریم که $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, n)$. طبق تعریف θ، $M^* \vDash \exists \overline{z}\exists v(\psi(\overline{m}, v, \overline{z}) \wedge v \neq n)$. پس $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, v)$ و $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, n)$ که این تناقض است.

حال فرض کنید، $M^* \vDash \varphi(\overline{m}, n)$ اما $f(\overline{m}) \neq n$. پس $f(\overline{m}) = k$ که $k \neq n$. در نتیجه $M^* \vDash \theta(\overline{m}, k)$. اما این متناقض با شرط (۱) می‌باشد. □

لم ۳.۱.۵. اگر $f : M^k \longrightarrow M$، یک تابع باشد که توسط یک Σ_{n+1}–فرمول در M تعریف شود، آنگاه f، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است.

برهان. اگر Σ_{n+1}–فرمول $\exists \overline{z}\psi(\overline{x}, y, \overline{z})$ ($\psi \in \Pi_n$)، تابع f را تعریف کند، آنگاه Π_{n+1}–فرمول:

$$\theta(\overline{x}, y) \equiv \forall \overline{z}\forall v(\psi(\overline{x}, v, \overline{z}) \longrightarrow v = y)$$

نیز تابع f را تعریف می‌کند. پس گراف تابع f، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. در نتیجه f، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. □

تبصره ۴.۱.۵. در مورد $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیری، حقایق زیر را داریم:

(۱) یک تابع بازگشتی روی ω $\Delta_1(\omega)$–تعریف‌پذیر است.

برهان. از آنجایی که توابع بازگشتی روی ω توسط یک Σ_1–فرمول تعریف می‌شوند، حکم طبق لم قبل برقرار است. □

(۲) توابع $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر، تحت ترکیب بسته هستند.

برهان. فرض کنید توابع $M \longrightarrow M^k : f$ و $g_i : M^n \longrightarrow M$، (به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant k$)، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر باشند. بنابراین طبق تعریف، Σ_{n+1}–فرمول‌های $\Phi(\overline{x}, y)$ و $\Phi_i(\overline{x_i}, y_i)$ که $1 \leqslant i \leqslant k$، به ترتیب برای f و g_iها وجود دارند به طوری که به ازای هر توسیع انتهایی $M^* \succ_{\Sigma_n} M$ داریم:

$1_f : \forall \overline{m} \in M, M^* \vDash \exists ! y \Phi(\overline{m}, n)$

$2_f : \forall \overline{m}, n \in M, f(\overline{m}) = n \Longleftrightarrow M^* \vDash \Phi(\overline{m}, n)$

و به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant k$،

$1_{g_i} : \forall \overline{m_i} \in M, M^* \vDash \exists ! y_i \Phi_i(\overline{m_i}, y_i)$

$2_{g_i} : \forall \overline{m_i}, n_i \in M, g_i(\overline{m_i}) = n_i \Longleftrightarrow M^* \vDash \Phi_i(\overline{m_i}, n_i)$

Σ_{n+1}–فرمول $\psi(\overline{x_i}, z)$ را به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant k$، به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$\exists y_1, ..., \exists y_k(\Phi_1(\overline{x_1}, y_1) \wedge ... \wedge \Phi_k(\overline{x_k}, y_k) \wedge \Phi(y_1, ..., y_k, z)).$$

حال داریم:

$1: \ \forall \overline{m_i} \in M, M^* \vDash \exists ! y \psi(\overline{m_i}, y)$

$2: \ \forall \overline{m_i}, n \in M, f(g_1(\overline{m_i}), ..., g_k(\overline{m_i})) = n \Longleftrightarrow M^* \vDash \psi(\overline{m_i}, n)$

□

(۳) اگر f یک تابع $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر و $A(x,y)$، یک رابطه $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر باشند، آنگاه رابطه $A(x, f(y))$ نیز، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است.

برهان.

$$.A(x,f(y)) = \{(x,y) : A(x,f(y))\} = \{(x,y) : \exists z(z = f(y) \wedge A(x,z))\}$$

بنابراین با توجه به اینکه f و $A(x,z)$، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر هستند، $A(x,f(y))$ نیز، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. □

(۴) اگر f، یک تابع جزئی $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر با دامنه $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر باشد، آنگاه f را می‌توان به یک تابع تام $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر، گسترش داد.

برهان. تعریف کنید

$$f^*(\overline{x}) = \begin{cases} f(\overline{x}) & x \in \texttt{Dom(f)} \\ 0 & x \notin \texttt{Dom(f)} \end{cases}$$

در این‌صورت f^* تام است. فرض کنید $Dom(f) = A \subsetneq M^k$. مجموعه A، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است، پس Σ_{n+1}–فرمول $\varphi(\overline{x})$ و Π_{n+1}–فرمول $\psi(\overline{x})$ موجود هستند به طوری که به ازای هر توسیع انتهایی $M \prec_{\Sigma_n} M^*$ و به ازای هر $\overline{m} \in M^k$ داریم:

$$.\overline{m} \in A \iff M^* \vDash \varphi(\overline{m}) \iff M^* \vDash \psi(\overline{m})$$

حال برای هر $\overline{m} \in M^k$ داریم:

$$.\overline{m} \in A^c \iff M^* \vDash \neg\varphi(\overline{m}) \iff M^* \vDash \neg\psi(\overline{m})$$

بنابراین A^c نیز، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. تابع f نیز، $\Delta_{n+1}(M)$–پذیر است. پس Σ_{n+1}–فرمول $\lambda(\overline{x},y)$، موجود است که در شرایط (۱) و (۲) از تعریف قبل، صدق می‌کند. حال $\theta(\overline{x},y)$ را فرمول $(\lambda(\overline{x},y) \wedge \varphi(\overline{x})) \vee (\lambda(\overline{x},0) \wedge \neg\psi(\overline{x}))$ بگیرید. به وضوح θ، Σ_{n+1}–فرمول است و $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیری تابع f^* را برآورده می‌کند. □

حال تعریف‌پذیری مدل N در M به $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیری تعمیم داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۵. فرض کنید M و N مدل‌های PA و n یک عدد طبیعی باشد. گوئیم N، $\Delta_{n+1}(M)$ –تعریف‌پذیر است هرگاه، مجموعه $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر $D_N \subset M$، عناصر 0_N و 1_N در D_N، توابع $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر $+_N$ و $\cdot_N$ در M و مجموعه $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر $<_N \subset M^2$ در M، موجود باشند به طوری که $N = (D_N, 0_N, 1_N, +_N, \cdot_N, <_N)$.

لم ۶.۱.۵. اگر N، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر و ε نشاننده استاندارد از M به N باشد، آنگاه ε، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است.

برهان. فرمول $\varphi(x,y)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$\exists z[(z)_0 = 0 \wedge ((z)_x = y \wedge (\forall i < x)((z)_{i+1} = (z)_i +_N 1)].$$

چون $+_N$، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است، لذا φ یک Σ_{n+1}–فرمول می‌باشد. در نتیجه نگاشت ε، توسط φ در M تعریف شده است. حال بنا به لم ۳.۱.۵، نگاشتε، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. □

لم ۷.۱.۵. اگر N، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر باشد، آنگاه رابطه $\varepsilon(x) \in_N y$، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است.

برهان. فرض کنید $\mathtt{mod}_N(x,y) = z$، فرمول $(\exists w \in D_N)(x = y \cdot_N w +_N z \wedge z <_N y)$ باشد. از ۳.۱.۵، نتیجه می‌شود که $\mathtt{mod}_N(x,y) = z$، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. زیرا بنا به لم ۶.۱.۵، ε، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. Σ_{n+1}– فرمول‌های $\varphi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(x,y) \equiv \exists w(w = \mathrm{p}(x) \wedge \mathtt{mod}_N(y, \varepsilon(w)) = 0).$$

$$\psi(x,y) \equiv \exists w(w = \mathrm{p}(x) \wedge (\exists u \in D_N)(\mathtt{mod}_N(y, \varepsilon(w)) = u \wedge u \neq 0)).$$

که در آن $\mathrm{p}(x)$ نشان دهنده x–امین عدد اول می‌باشد. با توجه به اینکه ε، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است، به ازای هر $a, b \in M$ داریم:

$$N \vDash \varepsilon(a) \in b \Longleftrightarrow N \vDash \exists x[\mathrm{p}(\varepsilon(a)) \cdot x = b]$$

(بنا به تبصره ۱۶.۲.۲)

$$\Longleftrightarrow M \vDash (\exists x \in D_N)[\mathrm{p}_N(\varepsilon(a)) \cdot_N x = b]$$

(بنا به تبصره ۵.۳.۲)

$$\Longleftrightarrow M \vDash (\exists x \in D_N)[\varepsilon(\mathrm{p}(a)) \cdot_N x = b]$$

$$\Longleftrightarrow M \vDash \varphi(a, b)$$

و همچنین با توجه به ضابطه φ و ψ داریم:

$$N \nvDash \varepsilon(a) \in b \Longleftrightarrow M \nvDash \varphi(a, b) \Longleftrightarrow M \vDash \psi(a, b).$$

حال برای هر توسیع انتهایی $M \prec_{\Sigma_n} M^*$، نشان می‌دهیم که هیچ $a, b \in M$ وجود ندارد به طوری که:

$$M^* \vDash \varphi(a, b) \wedge \psi(a, b).$$

فرض کنید $a, b \in M$ چنان باشند که $M^* \vDash \varphi(a, b) \wedge \psi(a, b)$، چون $M^* \vDash \psi(a, b)$، پس

$$\exists a, b \in M^* : M^* \vDash c = \mathrm{p}(a) \wedge d \in D_N \wedge mod_N(b, \varepsilon(c)) = d \wedge d \neq 0.$$

از آنجا که توابع $\mathrm{p}, \varepsilon, mod_N$، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر هستند، پس $c, d \in M$ و

$$M \vDash c = \mathrm{p}(a) \wedge d \in D_N \wedge mod_N(b, \varepsilon(c)) = d \wedge d \neq 0.$$

پس $M \vDash \psi(a, b)$. به همین طریق از $M^* \vDash \varphi(a, b)$، به $M \vDash \varphi(a, b)$ می‌رسیم. اما این، متناقض با مدل بودن بودن M است. پس به ازای هر $a, b \in M$، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

(۱) $M^* \vDash \neg\varphi(a, b) \Longleftrightarrow M \vDash \neg\varphi(a, b) \Longleftrightarrow M \vDash \psi(a, b) \Longleftrightarrow M^* \vDash \psi(a, b)$،

(۲) $M^* \vDash \neg\psi(a, b) \Longleftrightarrow M \vDash \neg\psi(a, b) \Longleftrightarrow M \vDash \varphi(a, b) \Longleftrightarrow M^* \vDash \varphi(a, b)$.

هر دو حالت نشان می‌دهد رابطه $\varepsilon(x) \in_N y$، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. □

لم ۸.۱.۵. اگر Ψ، مجموعه همه زیرمجموعه‌های $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر M باشد، آنگاه اعضای Ψ، توسط یک رابطه $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر $A(x,y)$، به طور یکنواخت تعریف نمی‌شوند (تعریف ۱.۱.۳ را ببینید).

برهان. فرض کنید چنین نباشد و رابطه $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر $A \subseteq M^2$، چنان باشد که Ψ را به طور یکنواخت تعریف کند. تعریف کنید $B = \{a \in M : (a,a) \notin A\}$. B، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. زیرا با توجه به $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیری A، Σ_{n+1}–فرمول $\varphi(\overline{x})$ و Π_{n+1}–فرمول $\psi(\overline{x})$ موجودند به طوری که برای هر توسیع انتهایی $M \prec_{\Sigma_n} M^*$، داریم:

$$\overline{a} \in A \iff M^* \vDash \varphi(\overline{a}) \iff M^* \vDash \psi(\overline{a}).$$

اکنون داریم:

$$a \in B \iff (a,a) \notin A \iff M^* \vDash \neg\varphi(\overline{a}) \iff M^* \vDash \neg\psi(\overline{a}).$$

که نشان می‌دهد B، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر است. پس $B \in \Psi$ و بنابراین $b \in M$ وجود دارد به طوری که $B = \{a \in M : (a,b) \in A\}$. در این‌صورت داریم، $(b,b) \notin A \iff (b,b) \in A$ که یک تناقض آشکار است (برهان گزاره ۲.۱.۳ را ببینید). $\square$

قضیه ۹.۱.۵. فرض کنید N، $\Delta_{n+1}(M)$–تعریف‌پذیر و نشاننده استاندارد ε، Σ_n–مقدماتی باشد. در این صورت N، به طور تعریف‌پذیر، یکریخت با M است.

برهان. ابتدا با استقرا روی a دیده می‌شود که برای هر $a \in N$ داریم:

$$N \models \exists y(\forall x < a)(\phi(x) \longleftrightarrow x \in y) \quad (\star).$$

برای $a = 0$، از آنجا که $x \in N$ موجود نیست که $M \vDash x < 0$، پس $(\star)$ برقرار است.

فرض کنید $(\star)$ برای a برقرار باشد. پس $y \in N$ موجود است که $N \vDash (\forall x < a)(\varphi(x) \longleftrightarrow x \in y)$.

دو حالت زیر را داریم:

(الف) $N \vDash \varphi(a)$. در این حالت قرار می‌دهیم $y.\mathrm{p}(a) = z$، که $\mathrm{p}(a)$، a–امین عدد اول است.

(ب) $N \vDash \neg\varphi(a)$. در این حالت ابتدا $k \in \omega$ را چنان بگیرید که $N \vDash \mathrm{p}(a)^k | y$ و $N \vDash \mathrm{p}(a)^{k+1} \nmid y$، سپس قرار دهید $z = y/\mathrm{p}(a)^k$. در هر دو حالت $z \in N$ و داریم:

$N \vDash \exists z (\forall x < a+1)(\phi(x) \longleftrightarrow x \in z)$، زیرا $N \vDash \forall x(x < a+1 \to x = a \vee x < a)$.

حال فرض کنید نشاننده استاندارد ε، غیر پوشا باشد. $\varepsilon(M)$، یک بخش آغازین Σ_n−مقدماتی برای N است. اگر $A \subset M$، $\Delta_{n+1}(M)$− تعریف‌پذیر باشد، Σ_{n+1}− فرمول $\varphi(x, \bar{b})$ را به عنوان شاهدی برای $\Delta_{n+1}(M)$−تعریف‌پذیری مجموعه A، انتخاب می‌کنیم. حال برای $a \in M$ داریم:

$$a \in A \Longleftrightarrow M \vDash \varphi(a, \bar{b}) \Longleftrightarrow N \vDash \varphi(\varepsilon(a), \varepsilon(\bar{b})).$$

حال $d, e \in N$ را چنان در نظر می‌گیریم که $N \vDash \varepsilon(M) < d$ و $N \vDash (\forall x < d)(\varphi(x, \varepsilon(\bar{b})) \longleftrightarrow x \in e)$. اکنون برای $a \in M$ نتیجه می‌گیریم که

$$a \in A \Longleftrightarrow N \vDash \varepsilon(a) \in e \Longleftrightarrow M \vDash \varepsilon(a) \in_N e.$$

طبق لم ۵.۱.۷، رابطه $\varepsilon(x) \in_N y$، $\Delta_{n+1}(M)$−تعریف‌پذیر است. پس این رابطه، همه زیرمجموعه‌های $\Delta_{n+1}(M)$−تعریف‌پذیر را به صورت یکنواخت تعریف می‌کند که تناقض است. □

با توجه به قضیه قبل، نتیجه زیر تعمیم قضیه تننباوم است.

نتیجه ۵.۱.۱۰. اگر N، $\Delta_1(M)$−تعریف‌پذیر باشد آنگاه N به طور تعریف‌پذیر، یکریخت با M است.

برهان. با توجه به قضیه باید نشان دهیم که نشاننده استاندارد، Δ_0−مقدماتی است. فرض کنید $\varphi(\overline{x})$ یک Δ_0− فرمول باشد و $\overline{a} \in M$. در این صورت داریم:

$$M \vDash \varphi(\overline{a}) \underbrace{\Longleftrightarrow}_{(1)} \varepsilon(M) \vDash \varphi(\varepsilon(\overline{a})) \underbrace{\Longleftrightarrow}_{(2)} N \vDash \varphi(\varepsilon(\overline{a})).$$

که در عبارت بالا به دلیل اینکه ε، یک خودریختی بین M و $\varepsilon(M)$ برقرار می‌کند رابطه (1) و بدلیل اینکه $\varepsilon(M) \prec_{\Delta_0} N$، رابطه (2) برقرار است. □

نتیجه بعد، نسخه‌ای از قضیه تننباوم را با شرایط بیشتری ارائه می‌دهد. به این معنا که در قضیه تننباوم فرض بر این بود که یکی از عمل‌های جمع یا ضرب مدل تعریف‌پذیر در مدل استاندارد، بازگشتی است، اما در اینجا فرض بر این است که مدل مربوطه، یک مدل بازگشتی در مدل استاندارد است.

نتیجه ۱۱.۱.۵. اگر N، یک مدل بازگشتی در مدل استاندارد ω باشد، آنگاه N، استاندارد است.

برهان. هر مدل بازگشتی در ω ، $\Delta_1(\omega)-$ تعریف‌پذیر است و با توجه به نتیجه قبلی، این نتیجه برقرار است. $\square$

فصل ۶

روشی برای ساخت مدل‌های تعریف‌پذیر

۱.۶ روشی برای ساخت مدل‌های تعریف‌پذیر

در این فصل با استفاده از اصلاحی بر روش کوتلارسکی به کار رفته در [6]، روش جدیدی برای ساخت مدل‌های تعریف‌پذیر در مدل‌های PA ارائه می‌شود. به ویژه نشان داده خواهد شد که مدل تعریف‌پذیر N در M وجود دارد به طوریکه N به طور بازگشتی اشباع‌شده و یک توسیع انتهایی Σ_m^+–مقدماتی از M است.

قرارداد

ازین به بعد فرض کنید M، مدل نااستاندارد PA و $T(\supset PA)$، یک نظریه تعریف‌پذیر توسط یک فرمول در M باشد.

ابتدا طبقه‌بندی زیر از فرمول‌ها ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۱.۶. فرض کنید $\Sigma_0^+ = \Pi_0^+ = Q_0 = \Delta_0$ مجموعه فرمول‌های با سورهای کراندار باشد. Σ_{n+1}^+، مجموعه فرمول‌های بدست آمده از Q_n–فرمول‌ها، با استفاده مکرر از سورهای کران‌دار، سور وجودی و ترکیبات بولی مثبت $(\wedge, \vee)$ است. Π_{n+1}^+، مجموعه فرمول‌های بدست‌آمده از Q_n–فرمول‌ها، با استفاده از سورهای کراندار، سور عمومی و ترکیبات بولی مثبت است.
و Q_{n+1}–فرمول‌ها، مجموعه فرمول‌های بدست‌آمده از مجموعه $\Sigma_{n+1}^+ \cup \Pi_{n+1}^+$، با استفاده مکرر از ترکیبات بولی است.

تبصره ۲.۱.۶. یک Δ_1–فرمول مانند $\theta(x, y)$ وجود دارد که بیان می‌کند x یک فرمول در Q_y است. این فرمول $\theta(x, y)$ به طور ساده با $x \in Q_y$ نشان داده می‌شود. اگر y نااستاندارد باشد آنگاه هر فرمول استاندارد متعلق به Q_y است. فرمول‌های $x \in \Sigma_y^+$ و $x \in \Pi_{n+1}^+$ هم به طور مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف ۳.۱.۶. ([6])

فرمول $Prov_T(w, y, x)$، بیان می‌کند که y، T–برهانی برای فرمول x است به طوری که همه فرمول‌های واقع در T–برهان y، متعلق به Q_w هستند. با توجه به تعریف، $Pr_T(w, x)$ را فرمول $\exists y Prov_T(w, y, x)$ و $Con_T(w)$ را فرمول $\neg Pr_T(w, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ در نظر بگیرید.

لم ۴.۱.۶. ([6])

فرمول $C_T(x, y)$ وجود دارد به طوری که

$$PA \vdash Con_T(y) \leftrightarrow [Con_{C_T}(y) \wedge (\forall x \in Q_y)(Pr_T(y, x) \wedge Sent(x) \to C_T(x, y))$$
$$\wedge (\forall x \in Q_y)(Sent(x) \to C_T(x, y) \vee C_T(\neg x, y))],$$

که در آن $Con_{C_T}(y)$، فرمول بدست‌آمده از $Con_T(y)$، با جایگذاری $C_T(x, y)$ به $x \in T$ است. همچنین $Sent(x)$، فرمولی است که بیان می‌کند x یک جمله است و $\neg x$، کد نقیض فرمول کد شده توسط x را نشان می‌دهد.

برهان. ابتدا یاد آوری می‌کنیم که $T \supset PA$. فرض کنید $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$، دنباله شمارای همه Q_y–جمله‌ها با شرط $\ulcorner \varphi_i \urcorner < \ulcorner \varphi_{i+1} \urcorner$، برای تمامی iها باشد. (توجه کنید که فرمولی وجود دارد که بیان می‌کند x، z–امین فرمول در شمارش Q_y است.) حال دنباله جدید $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ از Q_y–جمله‌ها را بصورت زیر تعریف کنید:

$$\psi_i = \begin{cases} \varphi_i & \neg Pr_T(y, \bigwedge_{j<i} \psi_j \to \neg \varphi_i) \\ \neg \varphi_i & Pr_T(y, \bigwedge_{j<i} \psi_j \to \neg \varphi_i) \end{cases}$$

بنابراین فرمول $A(x, y, z)$ وجود دارد که بیان می‌کند x، z–امین، Q_y–فرمول ψ_z در دنباله است. در این صورت $C_T(x, y) = \exists z A(x, y, z)$، فرمول مورد نظر ماست. $\square$

قرارداد

از این به بعد می‌پذیریم که $M^* \vDash Con_T(n^*)$، برای عضو نااستاندارد n^* در M برقرار است و قرار دهید $n^* = 3m^*$. همچنین $C_T(x,y)$ را فرمول به دست آمده از T با استفاده از لم ۴.۱.۶، قرار داده و $C_T(x)$ را فرمول $C_T(x,n^*)$ در نظر بگیرید.

تبصره ۵.۱.۶. فرض کنید $M \vDash C_T(x) \wedge y \in Q_{n^*}$. در این‌صورت اگر فرمول $x \to y$، در حساب محمولات اثبات‌پذیر باشد آنگاه $M \vDash C_T(y)$.

تعریف ۶.۱.۶. **(۱)** برای هر $\varphi(\overline{x})$ و $\psi(\overline{x})$ در Q_{n^*}، گوییم φ با ψ، C_T–معادل است اگر

$$M \vDash C_T(\ulcorner \forall \overline{x}[\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})]\urcorner).$$

در تعریف فوق توجه کنید که نیازی نیست فرمول‌های φ و ψ استاندارد باشند.

(۲) مجموعه $\Sigma^*_{m^*}$ را مجموعه همه φهایی در Q_{2m^*} در نظر بگیرید که با یک $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول، C_T–معادل باشند.

(۳) فرض کنید $D(\subset M)$، مجموعه تعریف‌پذیر $\{\theta \in \Sigma^+_{m^*} : M \vDash C_T(\ulcorner \exists! x\theta(x)\urcorner)\}$ باشد. رابطه هم‌ارزی تعریف‌پذیر $\sim$ را روی D، بصورت زیر تعریف کنید:

$$\theta \sim \theta' \Longleftrightarrow M \vDash C_T(\ulcorner \forall x[\theta(x) \leftrightarrow \theta'(x)]\urcorner)].$$

یعنی، $\theta \sim \theta'$ اگر و تنها اگر θ با θ'، C_T–معادل باشد.

با توجه به تعریف فوق لم‌های زیر را خواهیم داشت.

لم ۷.۱.۶. اگر $\theta(x)$ متعلق به D باشد آنگاه $\neg\theta(x)$، یک $\Sigma^*_{m^*}$–فرمول است.

برهان. چون $\theta(x) \in D$، $\neg\theta(x)$ یک Q_{2m^*}–فرمول است. همچنین $\neg\theta(x)$، C_T–معادل با فرمول $\exists y(y \neq x \wedge \theta(y))$ است. $\exists y(y \neq x \wedge \theta(y))$، از یک فرمول استاندارد و یک $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول، با استفاده از ترکیب بولی مثبت و سور وجودی ساخته شده است، بنابراین یک $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول است. ازین رو $\neg\theta(x)$، یک $\Sigma^*_{m^*}$–فرمول است. $\square$

لم ۸.۱.۶. فرض کنید $\varphi(x, y_1, ..., y_n)$، یک فرمول استاندارد و $\theta_1, ..., \theta_n$، متعلق به D باشند. در این‌صورت

۱. $\exists y_1, ..., \exists y_n(\varphi(x, \overline{y}) \wedge \bigwedge_i \theta_i(y_i))$، یک $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول است.

۲. $\neg\exists y_1, ..., \exists y_n(\varphi(x, \overline{y}) \wedge \bigwedge_i \theta_i(y_i))$، یک $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول است.

برهان. ۱. طبق تعریف D برقرار است. ۲. فرمول داده شده یک Q_{2m^*}–فرمول است که C_T–معادل با $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول $\exists \overline{y}(\neg\varphi(x, \overline{y}) \wedge \bigwedge_i \theta_i(y_i))$ است. □

ساخت مدل تعریف‌پذیر

با توجه به تعریف مجموعه D و رابطه هم‌ارزی تعریف شده روی آن، مدل تعریف‌پذیر N در M بصورت زیر ساخته می‌شود:

جهان N را مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی روی D فرض کنید، یعنی $D/\sim = \{[\theta] : \theta \in D\}$.

کلاس هم‌ارزی $[x = 0]$ را برابر 0_N و کلاس هم‌ارزی $[x = 1]$ را برابر 1_N قرار دهید.

تابع $+_N$ روی N را بصورت

$$[\varphi] +_N [\psi] := [\exists y \exists z(x = y + z \wedge \varphi(y) \wedge \psi(z))]$$

و تابع $\cdot_N$ روی N را بصورت

$$[\varphi] \cdot_N [\psi] := [\exists y \exists z(x = y \cdot z \wedge \varphi(y) \wedge \psi(z))]$$

تعریف کنید. توجه کنید که در تعاریف فوق، فرمول‌های داخل کروشه، $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول هستند.

لم زیر نشان می‌دهد که مدل N ساخته شده به روش بالا یک مدل تعریف‌پذیر در مدل M است.

لم ۹.۱.۶. فرض کنید که N، مدل ساخته شده طبق روش بالا و $\varphi(x_1, ..., x_k)$، یک فرمول استاندارد و $\theta_1, ..., \theta_k$، متعلق به N باشند. در اینصورت:

$$N \vDash \varphi([\theta_1], ..., [\theta_k]) \Leftrightarrow M \vDash C_T(\ulcorner \exists y_1 ... \exists y_k[\varphi(y_1, ..., y_k) \wedge \theta_1(y_1) \wedge ... \wedge \theta_k(y_k)]\urcorner).$$

برهان. فرض کنید k_φ، تعداد نمادهای منطقی فرمول φ باشد. با استقرا روی k_φ، نشان می‌دهیم که رابطه داده شده برقرار است. اگر $k_\varphi = 0$ آنگاه طبق تعریف N، رابطه برقرار است. از آنجا که حالت رفت $(\Rightarrow)$ برقرار است، طرف دیگر رابطه را اثبات می‌کنیم. مهمترین حالت زمانی اتفاق می‌افتد که $\varphi(\overline{x})$ بصورت $\exists z\varphi_0(z,\overline{x})$ باشد. فرض کنید $\tau_0(z)$، فرمول $\exists y_1...\exists y_k[\varphi_0(z,y_1,...,y_k) \wedge \bigwedge_j \theta_j(y_j)]$ باشد. τ_0 یک $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول است. همچنین فرض کنید $\tau_1(z)$ نیز فرمول $\tau_0 \wedge (\forall w < z)\neg\tau_0(w)$ باشد. چون $\neg\tau_0(w)$، یک $\Sigma^*_{m^*}$–فرمول است $\varphi_1(z)$ نیز یک $\Sigma^*_{m^*}$–فرمول می‌باشد. داریم $M \vDash C_T(\ulcorner\exists! z\tau_1(z)\urcorner)$.
فرض کنید $\tau(x)$ یک $\Sigma^+_{m^*}$–فرمول باشد که C_T–معادل با $\tau_1(x)$ است، در این صورت $M \vDash C_T(\ulcorner\exists! z\tau(z)\urcorner)$. بنابراین $[\tau] \in N$ و خواهیم داشت:

$$M \vDash C_T(\ulcorner\exists z\exists y_1...\exists y_k[\varphi_0(z,y_1,...,y_k) \wedge \tau(z) \bigwedge \theta_j(y_j)]\urcorner).$$

حال با استفاده از فرض استقرا روی φ_0 داریم $N \vDash \varphi_0([\tau],[\theta_1]..,[\theta_n])$.
پس $N \vDash \exists[z]\varphi_0([\theta_1],...,[\theta_n])$، در نتیجه $N \vDash \varphi([\theta_1],...,[\theta_n])$. □

تبصره ۱۰.۱.۶. مشابه برهان گزاره ۳.۱.۴ اثبات می‌شود که مدل N ساخته شده به روش قبل، یک مدل به طور بازگشتی اشباع‌شده است.

فرض کنید $x \in T$، فرمول $(x \in PA) \vee Tr_{\Sigma_n}(x)$ باشد که در آن $x \in PA$، فرمولی است که بیان می‌کند x، اصل موضوعی از اصول موضوع PA است. همچنین فرمول Tr_{Σ_n}، Σ_n–تعریف درستی برای Σ_n–فرمول‌هاست. یعنی برای هر n، فرمول $Tr_{\Sigma_n} \in \Sigma_n$ با تنها متغیر عددی آزاد x وجود دارد به طوری که، برای هر $\varphi(x) \in \Sigma_n$ داریم $T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow Tr_{\Sigma_n}(\ulcorner\varphi(\underline{x})\urcorner)$ (قضیه ۳.۵.۲ از [10]). با توجه به خاصیت بازتابی PA (قضیه ۲.۳۵ از [2])، (یک نظریه T بازتابی است هر گاه برای هر مجموعه متناهی $T' \subset T$، $T \vdash Con_{T'}$. تعریف ۲.۳۲ از [2])، برای هر $m \in \omega$ داریم $M \vDash Con_{T|m}$. بنابراین با استفاده از قضیه لبریز عضو نااستاندارد $m^* \in M$ وجود دارد به طوری که $M \vDash Con_{T|m^*}$. اکنون می‌توان با استفاده از قضیه حسابی‌شده تمامیت به یک مدل تعریف‌پذیر مانند N رسید به طوری که N، به طور بازگشتی اشباع‌شده و توسیع انتهایی از M و $M \equiv_{\Sigma_n} N$ باشد. اما نمی توانیم امیدوار باشیم که N

یک توسیه انتهایی Σ_n–مقدماتی از مدل M باشد. با این وجود از $M \equiv_{\Sigma_n^+} N$ می‌توان $M \prec_{\Sigma_n^+} N$ و از آن $M \prec_{\Sigma_n} N$ را نتیجه گرفت. از این رو می‌توانیم قضیه بعد را مطرح کنیم.

قضیه ۱۱.۱.۶. فرض کنید M مدل نااستاندارد PA و n یک عدد طبیعی باشد. در این‌صورت مدل N وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. N یک مدل تعریف‌پذیر PA در M است.

۲. N به طور بازگشتی اشباع‌شده است.

۳. N یک توسیع Σ_n^+–مقدماتی از M است.

برهان. فرض کنید $x \in T$، فرمول $(x \in PA) \vee Tr_{\Sigma_n^+}(x)$ باشد. در این صورت برای هر $m \in \mathbb{N}$:

$$M \models (\forall x \in Q_m)(x \in T \to Tr_{Q_m}(x)).$$

همچنین فرض کنید $x \in Fml$، فرمولی باشد که بیان می‌کند، x یک فرمول است. بنابراین با استقرا روی طول برهان فرمول x داریم:

$$M \models (\forall x \in Fml)(Pr_T(m,x)) \to Tr_{Q_m}(x)),$$

و از اینجا برای هر $m \in \mathbb{N}$ نتیجه می‌شود که $M \models Con_T(m)$. پس طبق قضیه لبریز، عضو نااستاندارد n^* موجود است به طوری که $M \models Con_T(n^*)$. حال فرض کنید N، مدل ساخته شده به روش قبل باشد. طبق لم ۹.۱.۶، N، یک مدل تعریف‌پذیر در M و طبق تبصره ۱۰.۱.۶، N، یک مدل به طور بازگشتی اشباع‌شده می‌باشد. اکنون فرض کنید ε، نشاننده استاندارد M در N باشد. از آنجایی که ε، یک خودریختی بین M و $\varepsilon(M)$ برقرار می‌کند، نتیجه می‌شود که N، یک توسیع انتهایی از M است. حال فرض کنید $\varphi(x)$، یک Σ_n^+–فرمول باشد به طوری که $M \models \varphi(m)$. در این صورت $M \models Tr_{\Sigma_n^+}(\ulcorner \varphi(\underline{m}) \urcorner)$، پس $M \models \ulcorner \varphi(\underline{m}) \urcorner \in T$. با توجه به تعریف C_T، $M \models C_T(\ulcorner \varphi(\underline{m}) \urcorner)$ و در نتیجه $M \models C_T(\ulcorner \exists x(\varphi(x) \wedge x = \underline{m}) \urcorner)$. حال با توجه به لم ۹.۱.۶، $N \models \varphi([x = \underline{m}])$ و چون $\varepsilon(m) = [x = \underline{m}]$، داریم: $N \models \varphi(\varepsilon(m))$. □

مراجع

[1] N. D. Giorgio, Non-Standard Models of Arithmetic: a Philosophical and Historical perspective, MSc Thesis, Universiteit van Amsterdam (2010).

[2] P. Hájek and P. Pudlák, Metamathematics of First Order Arithmetic (Springer, 1993).

[3] K. Ikeda and A. Tsuboi, Nonstandard models that are definable in models of Peano Arithmetic, Math. Log. Quart. 53, $27--37$ (2007).

[4] R. Kaye, Models of Peano Arithmetic (Clarendon Press, 1991).

[5] J. Knight, True approximations and models of arithmetic, In: Models and Computability (S. B. Cooper and J. K. Truss, eds.) London Math. Soc. Lecture Notes Series 259, $255--278$ (Cambridge University Press, 1999).

[6] H. Kotlarski, An addition to Rosser's theorem, J. Symbolic Logic 61, $285--292$ (1996).

[7] S. Shelah, Classification Theory and Number of Non-Isomorphic Models, 2nd revised edition (North-Holland, 1977).

[8] E. Shochat, Countable short recursively saturated models of arithmetic, Ph.D. Dissertation, City University of New York (2006).

[9] C. Smorynski, Recursively saturated nonstandard models of arithmetic, J. Symbolic Logic 46, $259--286$ (1981).

[10] C. Smorynski, The incompleteness theorems, In: Handbook of Mathematical Logic, $821--865$ (North-Holland, 1977).

[11] S. Tennenbaum, Non-archimedean models for arithmetic, Notices Amer. Math. Soc. 6, 270 (1959).

[12] A. Tsuboi, On M-recursively saturated models of arithmetic, Tsukuba J. Mathematics 6, 305 – – 318 (1982).

[13] G. Weaver, Henkin-Keisler Models, Kluwer Academic Publishers (1997).

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Arithmetized completeness theorem	قضیه حسابی‌شده تمامیت
Coded set	مجموعه کدشده
Cut	برش
Definable closure	بستار تعریف‌پذیر
Definable model	مدل تعریف‌پذیر
End extension	توسیع انتهایی
Henkin construction	ساختار هنکین
Henkin theory	نظریه هنکین
Intial segment	بخش آغازین
Overspill	لبریز
Partial recursive	بازگشتی جزئی
Peano arithmetic	حساب پئانو
Predicate logic	منطق محمولات
Primitive recursive	بازگشتی مقدماتی
Recursive definability	به طور تعریف‌پذیر بازگشتی
Recursively enumerable	به طور بازگشتی شمارا
Recursively saturated	به طور بازگشتی اشباع‌شده
Tennenbaum theorem	قضیه تننباوم
Uniformly definable	به طور یکنواخت تعریف‌پذیر

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

بازگشتی جزئی	Partial recursive
بازگشتی مقدماتی	Primitive recursive
بخش آغازین	Intial segment
برش	Cut
بستار تعریف‌پذیر	Definable closure
به طور بازگشتی اشباع‌شده	Recursively saturated
به طور بازگشتی شمارا	Recursively enumerable
به طور تعریف‌پذیر بازگشتی	Recursive definability
به طور یکنواخت تعریف‌پذیر	Uniformly definable
توسیع انتهایی	End extension
حساب پئانو	Peano arithmetic
ساختار هنکین	Henkin construction
قضیه تننباوم	Tennenbaum theorem
قضیه حسابی‌شده تمامیت	Arithmetized completeness theorem
لبریز	Overspill
مدل تعریف‌پذیر	Definable model
مجموعه کدشده	Coded set
منطق محمولات	Predicate logic
نظریه هنکین	Henkin theory

Surname: Esmati Mehrabani Name: Safdar

Title: Nonstandard models that are definable in Peano arithmetic

Supervisor: Saeed Salehi, Jafar Sadegh Eivazloo

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic

University of Tabriz Faculty of Mathematical Sciences

Date: 2012 Number of Pages: 51

Keywords: Peano Arithmetic, definable model, Tennenbaum's theorem, Henkin construction, Arithmetized completeness theorem.

Abstract: In this thesis, we study definable models of Peano Arithmetic PA in a model of PA. For any definable model N without parameters in a model M, it is shown that N is isomorphic to M, if M is elementary extension of the standard model and N is elementarily equivalent to M. On the other hand, it is shown that there is a model M and a definable model N with parameters in M such that N is elementarily equivalent to M but N is not isomorphic to M. We also see that there exists a model M and a definable model N with parameters in M such that N is elementarily equivalent to M, and N is isomorphic to M, but N is not definably isomorphic to M. And also, we study a generalization of Tennenbaum's theorem. At the end, we see a new method for constructing a definable model by a refinement of Kotlarski's method. The thesis is based on [3].

دانشگاه تبریز

University Of Tabriz

Faculty Of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

Nonstandard models that are definable in Peano arithmetic

supervisor

Saeed Salehi, Jafar Sadegh Eivazloo

by

Safdar Esmati Mehrabani

2012